Elementy logiki matematycznej

Przez p, q będziemy oznaczać zdania. Każdemu zdaniu możemy przyporządkować **wartość logiczną** 1, gdy jest prawdziwe oraz wartość logiczną 0, gdy jest fałszywe. Oznaczmy wartość logiczną zdania p przez $L(p)$.

PRZYKŁAD. Jeśli p jest zdaniem *„mucha jest owadem”*, a q zdaniem „$2+2=5$”, to $L(p)=1$, $L(q)=0$.

Ze zdań możemy tworzyć zdania złożone przy pomocy następujących znaków, zwanych **operacjami logicznymi**: (nie są to jedyne operacje logiczne, ale te wykorzystuje się w logice matematycznej - inne poznamy potem).

p'	czytamy	*nieprawda, że p*	*zaprzeczenie*
$p \wedge q$	...	*p i q*	*koniunkcja*
$p \vee q$	...	*p lub q*	*alternatywa*
$p \Rightarrow q$	...	*jeśli* p*, to q*	*implikacja*
$p \Leftrightarrow q$	...	*p wtedy i tylko wtedy gdy q*	równoważność

Dla implikacji w języku polskim stosuje się też inne sformułowania m.in.:

„*jeżeli p, to q*”
„*z p wynika q*”
„*p, więc q*”
„*ponieważ p, q*”
„*q, gdyż p*”
„*q, bo p*”
„*q, bowiem p*”

oraz nieco archaiczne

„*p pociąga q*”

Również koniunkcję możemy wyrażać w różny sposób. Możemy spójnik „*i*” zastąpić spójnikiem „*oraz*”. Rolę koniunkcji pełni też zapisanie zdań zakończonych kropkami (lub przecinkami) obok siebie. Oczywiste jest, że tą samą informację przekazują sformułowania:

Jest zimno i pada deszcz.
Jest zimno oraz pada deszcz.
Jest zimno. Pada deszcz.
Jest zimno, pada deszcz.

Zdarza się też, że to jaką rolę pełni dany spójnik zależy od kontekstu. Np. w zdaniu:

Nie zdam egzaminu i będę powtarzać rok

spójnik "i" formalnie przypisany koniunkcji pełni rolę bardziej implikacji niż koniunkcji.

W tabelkach widzimy wartości logiczne zdań złożonych w zależności od wartości logicznych zdań p i q.

p	p'
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

PRZYKŁAD. Niech p oznacza zdanie *„Warszawa jest stolicą Polski"*, a q zdanie „$\sqrt{2} > 3$". Skonstruuj zdania p', q', $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$ i ustal ich wartość logiczną.

Rozwiązanie.
p': *nieprawda, że Warszawa jest stolicą Polski,*
q': $\sqrt{2} \leqslant 3$,
$p \wedge q$: *Warszawa jest stolicą Polski i* $\sqrt{2} > 3$,
$p \vee q$: *Warszawa jest stolicą Polski lub* $\sqrt{2} > 3$,
$p \Rightarrow q$: *Jeśli Warszawa jest stolicą Polski, to* $\sqrt{2} > 3$,
$q \Rightarrow p$: *Jeśli* $\sqrt{2} > 3$, *to Warszawa jest stolicą Polski,*
$p \Leftrightarrow q$: *Warszawa jest stolicą Polski wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sqrt{2} > 3$.

Oczywiście $L(p) = 1$, $L(q) = 0$. Wykorzystując tabelki otrzymujemy:
$L(p') = 0$,

$L(q') = 1$,
$L(p \wedge q) = 0$,
$L(p \vee q) = 1$,
$L(p \Rightarrow q) = 0$,
$L(q \Rightarrow p) = 1$,
$L(p \Leftrightarrow q) = 0$.

Jeśli ktoś powie zdanie: *Jestem wysoki i gruby*, to zastanówmy się kiedy „złapiemy go na kłamstwie". Otóż wtedy, gdy okaże się, że nie jest on albo wysoki albo gruby. Jeśli więc jako p oznaczymy zdanie *jestem wysoki,* a jako zdanie q, *jestem gruby*, to intuicja podpowiada nam następującą regułę:

$$(p \wedge q)' \Leftrightarrow p' \vee q'.$$

Podobne rozumowanie doprowadzi i do drugiej reguły:

$$(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'.$$

Powyższe reguły noszą nazwę **praw de Morgana.** Oczywiście można je było formalnie wyprowadzić wykorzystując podane tabelki.

A oto jak wyglądają inne zaprzeczenia zdań złożonych:

$$(p')' \Leftrightarrow p;$$

$$(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow p \wedge q'.$$

Warto podać jeszcze jedną bardzo ważną regułę:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p').$$

Jest to tak zwana zasada argumentacji nie wprost. Polega ona na następującym toku wnioskowania:

Chcemy wykazać jakąś tezę q. Przyjmujemy za p całą dotychczasową wiedzę. Przypuszczamy, że zdanie q jest fałszywe, czyli, że q' jest prawdziwe.

Następnie pokazujemy, że z q' wynika sprzeczność, to znaczy jakiś fałsz w dotychczasowej wiedzy. Ale na mocy prawa de Morgana wynika stąd, że p jest fałszywe. Pokazaliśmy więc $q' \Rightarrow p'$, co z zasady argumentacji nie wprost jest równoważne temu, że z całej dotychczasowej wiedzy wynika q.

Reguły logiczne, czyli zdania zawsze prawdziwe nazywa się też **tautologiami**. Na przykład tautologiami są zdania (1.1): (1.5).

Zajmiemy się tautologiami w dalszej "niematematycznej" części wykładu.

Algebraiczne wzory na operacje logiczne

Czasami, przy wyprowadzaniu praw logicznych zamiast pisać tabelki wygodniej będzie przedstawić i zastosować "algebraiczne" wzory na operacje logiczne. Oto one

zaprzeczenie: $1 - p$

koniunkcja: pq

alternatywa: $p + q - pq$

implikacja: $1 - p + pq$

równoważność: $1 - (p - q)^2$.

Spróbujemy np. udowodnić prawo

$$[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)].$$

W zapisie algebraicznym mamy

Lewa strona: $pq + r - pqr$

Prawa strona: $(p + r - pr)(q + r - qr)$

Przekształcamy prawą stronę

$$(p + r - pr)(q + r - qr) = pq + pr - pqr + rq + r^2 - qr^2 - pqr - pr^2 + pqr^2.$$

Korzystamy z tego, że $p^2 = p$, $q^2 = q$, $r^2 = r$ i otrzymujemy

$$pq + r - pqr,$$

czyli lewą stronę.

Kwantyfikatory

Popatrzmy na poniższe zdanie:

Dla każdej liczby dodatniej a istnieje liczba ujemna b taka, że $b^2 = a$.

W zdaniu tym występują dwa zwroty niezwykle często używane przy okazji różnych zdań w matematyce (i nie tylko w matematyce): **dla każdego** *(elementu jakiegoś zbioru)* i **istnieje** *(element jakiegoś zbioru)*. Zwroty te są tak ważne, że wprowadza się dla nich specjalne oznaczenia zwane **kwantyfikatorami**. Mają one postać:

$$\bigwedge_{x \in A} \quad \text{czytamy} \quad \textit{dla każdego } x \textit{ ze zbioru } A,$$

$$\bigvee_{x \in A} \quad \text{czytamy} \quad \textit{istnieje } x \textit{ ze zbioru } A.$$

Stosuje się również inne oznaczenia kwantyfikatorów, a mianowicie $\forall$: zamiast $\bigwedge$ oraz $\exists$: zamiast $\bigvee$.

PRZYKŁAD. Zapiszemy przy pomocy kwantyfikatorów zdanie *„Wszyscy studenci z grupy D1 zdali egzamin z matematyki”.*

Oznaczmy przez $p(x)$ zdanie *„x zdał egzamin z matematyki”.* Wówczas nasze zdanie zapiszemy tak:

$$\bigwedge_{x \in D1} p(x).$$

W języku potocznym rolę kwantyfikatorów pełnią m.in. słowa:

każdy, wszystko, wszyscy, zawsze, wszędzie, nic, nigdy, nigdzie: kwantyfikator $\bigwedge$;

coś, ktoś, kiedyś, gdzieś, jakiś, przynajmniej raz: kwantyfikator $\bigvee$.

Kwantyfikatory pozwalają zapisywać zdania w sposób skrótowy. Pomagają też tworzyć szybko zaprzeczenia bardziej skomplikowanych zdań.

Zaprzeczenia zdań z użyciem kwantyfikatorów wyglądają bowiem następująco:

$$\left(\bigwedge_{x\in A} p(x)\right)' \Leftrightarrow \bigvee_{x\in A} (p(x))',$$

$$\left(\bigvee_{x\in A} p(x)\right)' \Leftrightarrow \bigwedge_{x\in A} (p(x))'.$$

Powyższe równoważności też noszą nazwę **praw de Morgana**.

PRZYKŁAD. Zapiszmy przy pomocy kwantyfikatorów zdanie (nieprawdziwe!):

Każda liczba rzeczywista ma pierwiastek.

$$\bigwedge_{x\in \mathbb{R}} \bigvee_{y\in \mathbb{R}} y^2 = x.$$

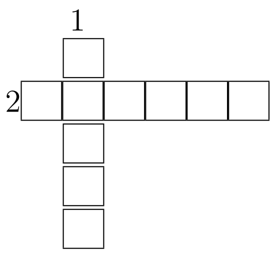
A oto uzyskane natychmiast jego zaprzeczenie:

$$\bigvee_{x\in \mathbb{R}} \bigwedge_{y\in \mathbb{R}} y^2 \neq x.$$

Jeśli Żeromski miał na imię Stefan, to mysikrólik jest ptakiem

Czy to jest sensowna implikacja? Wydaje się, że nie ma to specjalnego sensu, jednak można wymyślić taką sytuację, że zdanie to będzie całkiem logiczne. Oto ona:

Wybraźmy sobie taką krzyżówkę



1 pionowo: Rząd kręgowców, do którego zalicza się mysikrólik.
2 poziomo: Imię autora „Przedwiośnia”.

Ewa rozwiązuje krzyżówkę, Adam siedzi obok. Oto hipotetyczny dialog:

E: Kto napisał Przedwiośnie?

A: Żeromski.

E: Jak miał na imię?

A: Dokładnie nie pamiętam, ale albo Oswald albo Stefan. Jestem prawie pewien, że Stefan.

E: Czy mysikrólik jest ssakiem?

A: Coś ma wspólnego z myszą i z królikiem to pewnie ssak, ale coś mi się kojarzy, że może być ptakiem.

E. To by mi pasowało do Stefana.

Ewa wpisuje hasła jak poniżej i mówi

		1				
		P				
2	S	T	E	F	A	N
		A				
		K				
		I				

Jeśli Żeromski miał na imię Stefan, to mysikrólik jest ptakiem

Zbiory

Pojęcie zbioru pojawiło się stosunkowo późno – po roku 1850. Nie będziemy tu zajmować się teorią matematyczną związaną ze zbiorami (tzw. „teoria mnogości”), podamy tylko najprostsze operacje na zbiorach i przede wszystkim poznamy sposoby określania zbiorów.

Sposoby określania zbiorów:

1. Wypisanie elementów zbioru w nawiasach klamrowych: np. $\{1, 2, 5\}$ oznacza zbiór złożony z trzech liczb 1, 2 i 5. Taki sposób stosujemy nie tylko w przypadku zbiorów skończonych, ale często i dla zbiorów nieskończonych. Na przyklad zapis $\{1, 3, 5, \ldots\}$ oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb nieparzystych.

2. Jednoznaczne stwierdzenie, jakim sposobem z pewnego większego zbioru wyróżnia się jego niektóre elementy. Ma to postać:

$$B = \{x \in A : \alpha(x)\}.$$

Oznacza to, że do zbioru B należą te elementy x ze zbioru A, dla których prawdziwe jest zdanie $\alpha(x)$.

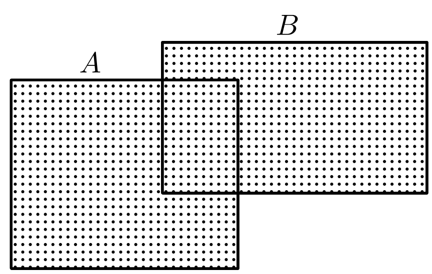
PRZYKŁAD. Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ oznacza zbiór liczb dodatnich, a zbiór $\left\{n \in \mathbb{N} : \bigvee_{m \in \mathbb{N}} n = 3m\right\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3.

3. Niektóre ważne zbiory mają swoje tradycyjne oznaczenia – jakby „imiona własne”, np. $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}^2$ – plaszczyzna, $\emptyset$ – zbiór pusty, $[a;b]$ lub $\langle a;b\rangle$ – przedział z końcami o lewym końcu a i prawym b, $(a;b)$ – analogiczny przedział bez końców.

Podstawowe działania na zbiorach to **suma mnogościowa** (znak $\cup$), **iloczyn mnogościowy** (znak $\cap$) i **różnica mnogościowa** (znak $-$ lub $-$).

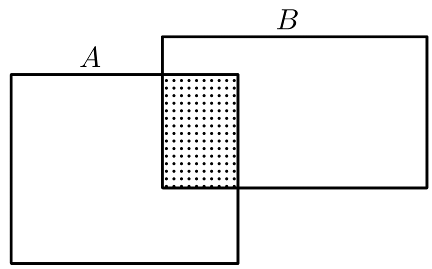
Niech A, B i C oznaczają zbiory.

Zbiór $A \cup B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.



Suma zbiorów $A \cup B$

PRZYKŁAD. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$. Wówczas $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Zbiór $A \cap B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B.

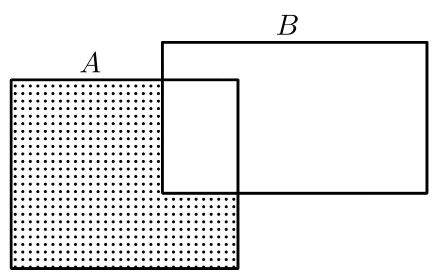


Iloczyn zbiorów: $A \cap B$

PRZYKŁAD. Niech $A = (-1; 4]$, $B = (2; 8)$. Wtedy $A \cap B = (2; 4]$.

Zbiór $A - B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

PRZYKŁAD. Niech $A = (-2; 5)$, $B = [0; 6]$. Wówczas $A - B = (-2; 0)$, zaś $B - A = [5; 6]$.



Różnica zbiorów: $A - B$

Ważne są następujące wzory (tzw. prawa de Morgana):

$$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B),$$

$$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B).$$

Jeśli zbiór C rozpatrywany powyżej jest zbiorem wszystkich elementów – nazywamy go wówczas **uniwersum**, to zbiór $C - A$ oznaczamy A' i nazywamy go **uzupełnieniem zbioru A.**

Wtedy prawa de Morgana zapiszemy następująco:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

ZADANIE. Niech $A = \{1, 3, 9, 11\}$, $B = \left\{ n \in \mathbb{N} : \bigvee_{k \in \mathbb{N}} n = 3k \right\}$. Obliczyć $A \cap B$, $A - B$.

Rozwiązanie.

Zbiór B jest to zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3. Zatem część wspólna zbiorów A i B jest równa $\{3, 9\}$, natomiast $A - B = \{1, 11\}$.

Iloczyn kartezjański

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór oznaczany $A \times B$ złożony z par (a, b), gdzie $a \in A, b \in B$.

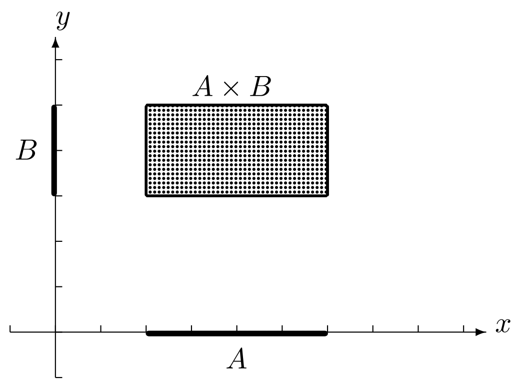
PRZYKŁAD. Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$. Wtedy

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Jeśli A ma n elementów, a B ma k elementów, to $A \times B$ ma nk elementów.

Najczęściej używanym iloczynem kartezjańskim jest $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, który utożsamiamy z płaszczyzna dwuwymiarową oznaczaną $\mathbb{R}^2$. Zatem jeśli A i B są podzbiorami $\mathbb{R}$, to $A \times B$ możemy traktować jako podzbiór $\mathbb{R}^2$.

Sytuację tę ilustruje rysunek. Na osi Ox zaznaczony jest zbiór A będący przedziałem $[2; 6]$, a na osi Oy zbiór B będący przedziałem $[3; 5]$. Wówczas zbiór $A \times B$ jest prostokątem o wierzchołkach $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(6, 3)$ i $(6, 5)$.



.

ANTYNOMIA RUSSELA

Rozważamy różne zbiory. M. in. zbiory, których elementami są też zbiory. Np.

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 5, A\}$$
$$C = \{3, A, B, C\}$$

Ostatni zapis oznacza, że sam zbiór C jest elementem zbioru C. Na tym ostatnim przykładzie opiera się paradoks Russela.

Nazwiemy zbiór A **normalnym**, jeśli $A \notin A$. Czyli np. w powyższych przykładach A i B są normalne, a C nie jest. Niech N będzie zbiorem wszystkich zbiorów normalnych.

Pytanie

CZY $N \in N$?

Jeśli $N \in N$, to N **nie jest** normalny, czyli $N \notin N$!!!

Jeśli $N \notin N$, to N **jest** normalny, a każdy zbiór normalny jest elementem N, czyli $N \in N$!!!

NAZWY

Nazwa — *to wyraz lub wyrażenie, które nadaje się na podmiot lub orzecznik w zdaniu—*

A jest B

A, B oznaczają nazwy.

Nie muszą to być rzeczowniki. Np

PRZYKŁAD(Y):

Umowa(A) jest nieważna(B)

PRZYKŁAD(Y):

Wyrok(A) jest prawomocny(B)

PRZYKŁAD(Y):

Biegnący zawodnik(A) był trzeci(B)

Desygnat — *obiekt, który określa dana nazwa*

Treść — *zbiór cech desygnatu*

Na przykład nazwę **STUDENT** możemy określić podając cechy, które określają obiekt będący desygnatem słowa student:

Na przykład osoba posiadająca maturę ucząca się na wyższej uczelni

LOGIKA – nauka normatywna, analizująca źródła poznania pod względem prawomocności czynności poznawczych z nimi związanych. (cytat z wikipedii).

Zakres nazwy — *zbiór wszystkich desygnatów opisywanych przez daną nazwę*

Zakłada się, że nazwa coś oznacza, jeśli ma przynajmniej jeden desygnat. Nie musi on istnieć faktycznie np.

PRZYKŁAD(Y):

Atlantyda, Zeus, Fruwający wieloryb

NAZWY MOGĄ BYĆ

Równoważne — *kiedy mają ten sam zbiór desygnatów*

Na przykład:

PRZYKŁAD(Y):

kartofel, ziemniak

PRZYKŁAD(Y):

stały, niezmienny

Równoznaczne — *kiedy mają takie same cechy*

Nazwy równoznaczne są zawsze równoważne. Ale nie na odwrót. Te same nazwy mogą być opisane innymi cechami:

PRZYKŁAD(Y):

Liczba naturalna mniejsza od 2 oraz Dzielnik każdej liczby naturalnej

są równoważne ale nie równoznaczne.

Podobnie

PRZYKŁAD(Y):

Autor "Pana Tadeusza" oraz Autor "Konrada Wallenroda"

Nazwy proste — *złożone z jednego wyrazu*

PRZYKŁAD(Y):

Koń, Zeus, złość, piąty

Nazwy złożone — *złożone z kilku wyrazów*

PRZYKŁAD(Y):

Najlepszy student w grupie, wyrok nieprawomocny

Nazwy konkretne — *posiadające desygnaty istniejące formalnie lub które możemy sobie wyobrazić*

PRZYKŁAD(Y):

Koń, Zeszyt w kratkę, Konrad Wallenrod, Rejent Milczek, elf, krasnoludek

Nazwy abstrakcyjne — *nie odnoszą się do konkretnych obiektów*

PRZYKŁAD(Y):

złość, pięć, czwarty, stan wyjątkowy

Nazwy generalne — *polegają na określeniu cech jakie posiadać powinien desygnat aby znaleźć się w zakresie nazwy*

PRZYKŁAD(Y):

książka, dom, umowy o najem, wyrok prawomocny

nazwa indywidualna — *nazwa przypisana danemu desygnatowi niezależnie od jego cech*

PRZYKŁAD(Y):

Ciechanów, Adam Kozłowski, Rejent Milczek, Konrad Wallenrod

Nazwy ostre — *to takie, które mają precyzyjnie określony zbiór swoich desygnatów (zakres)*

PRZYKŁAD(Y):

Umowa dwustronna, Senat RP, Najdłuższa rzeka w Polsce

Nazwy nieostre — *przeciwne do ostrych*

PRZYKŁAD(Y):

Wysoki człowiek, obrona konieczna (niestety wiele pojęć prawnych jest nieostrych dopuszczając dowolność interpretacji, co jest niezwykle korupcjogenne!)

SUPOZYCJE

Supozycja nazwy — *to kontekst jej użycia – zależy od konkretnej wypowiedzi*

RODZAJE SUPOZYCJI

Prosta — *dotyczy konkretnych desygnatów*

PRZYKŁAD(Y):

Umowa właśnie została podpisana.

Formalna — *jeśli chcemy aby dotyczyła wszystkich desygnatów*

PRZYKŁAD(Y):

Umowa powinna być podpisana.

Materialna — *ma miejsce wtedy gdy dotyczy samej nazwy (wyrazu lub wyrażenia). Zwykle bierzemy ją wówczas w cudzysłów.*

PRZYKŁAD(Y):

Słowo "Umowa" zaczyna się na "u"

STOSUNEK ZAKRESOWY NAZW

Klasa uniwersalna — *zbiór wszystkich desygnatów istniejących nazw. Tak naprawdę z matematycznego punktu widzenia taki zbiór nie istnieje. Lepiej w takim razie użyć sformułowania* **"używanych"** *zamiast* **"istniejących"**.

Oznaczmy ten zbiór przez X. Nazywa się go często **Uniwersum.**

Dla danej nazwy N oznaczmy przez D_N jej zakres, czyli zbiór wszystkich desygnatów opisanych tą nazwą.

Klasa negatywna — *– do danej nazwy "N" jest to zbiór wszystkich desygnatów, które nie należą do zakresu nazwy "N". W języku rachunku zbiorów oznacza to:*

Klasą negatywną do nazwy N jest uzupełnienie zbioru D_N, czyli zbiór

$$X - D_N.$$

Nazwy N i M są zamienne (zakresowo), — *jeśli wyznaczają ten sam zakres, czyli*

$$D_N = D_M,$$

PRZYKŁAD(Y):

”Liczba 2” – ”rozwiązanie równania $2x = 4$”

PRZYKŁAD(Y):

Autor ”Pana Tadeusza” – Autor ”Konrada Wallenroda”

Nazwy N i M są w stosunku podrzędności, — *jeśli pierwsza ma mniejszy zakres niż druga, czyli*

$$D_N \subset D_M.$$

PRZYKŁAD(Y):

przepiórka – ptak

PRZYKŁAD(Y):

ptak – nie ryba

PRZYKŁAD(Y):

sędzia – prawnik

PRZYKŁAD(Y):

Wyrok prawomocny – wyrok

Niezależność nazw N i M — *oznacza, że*

$$D_N \cap D_M \neq \emptyset$$

oraz

$$D_N \cup D_M \neq X.$$

PRZYKŁAD(Y):

Prawnik – urzędnik

Podprzeciwieństwo nazw N i M — *oznacza, że*

$$D_N \cap D_M \neq \emptyset$$

oraz

$$D_N \cup D_M = X.$$

PRZYKŁAD(Y):

prawnik – nie adwokat

Przeciwieństwo nazw N i M — *oznacza, że*

$$D_N \cap D_M = \emptyset$$

oraz

$$D_N \cup D_M \neq X.$$

PRZYKŁAD(Y):

ptak – ryba

Sprzeczność nazw N i M — *oznacza, że*

$$D_N \cap D_M = \emptyset$$

oraz

$$D_N \cup D_M = X.$$

Patrz klasa negatywna.

PRZYKŁAD(Y):

prawnik – nie prawnik

Dalszy ciąg rachunku zdań

Wszystkie możliwe funktory jednoargumentowe

p	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Wszystkie możliwe funktory dwuargumentowe

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0

Nie wszystkie z tych funktorów są używane w języku. Jak już wiemy w języku matematycznym używa się tylko koniunkcji - f_{12}, alternatywy f_2, implikacji f_4, równoważności f_9.

W języku niematematycznym używa się też operacji:

DYSJUNKCJI – f_5 oznaczanej

$$p|q$$

i czytanej jako

p **bądź** q

lub bądź p bądź q;

Nazywa się ją też kreską Sheffera lub funkcją Sheffera.

ALTERNATYWY ROZŁĄCZNEJ – f_8 oznaczanej

$$p \perp q$$

i czytanej

p **albo** q**;**

BINEGACJI – f_{15} oznaczanej

$$p \downarrow q$$

i czytanej

ani p **ani** q**.**

Łatwo te trzy funktory zapisać przy pomocy klasycznych funktorów logiki matematycznej, a mianowicie

DYSJUNKCJA to zaprzeczenie KONIUNKCJI

czyli

$$(p|q) = (p \wedge q)'$$

ALTERNATYWA ROZŁĄCZNA to zaprzeczenie RÓWNOWAŻNOŚCI

czyli

$$(p \perp q) = (p \Leftrightarrow q)'$$

BINEGACJA to zprzeczenie ALTERNATYWY

czyli

$$(p \downarrow q) = (p \vee q)'$$

Funktor $|$ ma tę własność, że byłby on wystarczający do określenia **wszystkich** pozostałych funktorów!

Wyrażenie negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i alternatywy poprzez funktor $|$

p'	$p\|p$
$p \wedge q$	$(p\|q)\|(p\|q)$
$p \vee q$	$(p\|p)\|(q\|q)$
$p \Rightarrow q$	$p\|(q\|q)$
$p \Leftrightarrow q$	$\{(p\|q)\|[(p\|p)\|(q\|q)]\}$

PROBLEMY ŁĄCZNOŚCI

Sprawdzimy, które z działań logicznych są łączne

Dla koniunkcji wygląda to tak:

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Sprawdzimy to też dla pozostałych używanych funktorów tzn. alternatywy, implikacji, równoważności, dysjunkcji, alternatywy rozłącznej i binegacji.

PROBLEMY ROZDZIELNOŚCI

Sprawdzimy, które z poniższych zdań są prawami

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

$$p \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r),$$

$$p \vee (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r),$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r),$$

$$p \Rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r),$$

$$(p \vee q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r),$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

PROBLEMY NAWIASÓW

Przyjmuje się, że w pierwszej kolejności wykonujemy negację, potem koniunkcję i alternatywę, przy czym one są równoważne, następnie implikację i na końcu równoważność.

Jednak jak się nie ma pewności, czy można usunąć nawiasy to lepiej je napisać.

Napis

$$q \Rightarrow p \wedge r \Leftrightarrow r \Rightarrow s$$

może się obyć bez nawiasów, jeśli postawimy nawiasy (zachowując to samo znaczenie), to musimy to zrobić tak

$$[q \Rightarrow (p \wedge r)] \Leftrightarrow (r \Rightarrow s).$$

Natomiast napis

$$p \vee q \wedge r$$

jest niepoprawny

Bo jego wartość logiczna może zależeć od tego które działanie zrobimy najpierw.

Załóżmy, że p jest prawdziwe, a q i r fałszywe.

Wtedy zdanie

$$p \vee (q \wedge r)$$

jest prawdziwe, a zdanie

$$(p \vee q) \wedge r$$

jest fałszywe.

Podobnie przy dwóch implikacjach należy postawić nawiasy. Zdanie

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r$$

nie ma sensu, bo dla p, q, r fałszywych zdanie

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

jest prawdziwe, natomiast zdanie

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

jest fałszywe.

W wypadku mowy czy pisma "potocznego" nawiasów się nie używa, dlatego trzeba użyć innych sposobów, aby jednoznacznie wyrazić swoje myśli w omawianych sytuacjach. Rozważmy przykłady.

Rozpatrzmy następujące zdanie:

Jeśli *będę się uczył (p),* **to** *zdam egzamin z logiki (q)* **i** *zdam egzamin ze statystyki (r).*

Zarówno omawiana powyżej zasada o kolejności działań jak i intuicja prowadzi do wniosku, że to zdanie należy zrozumieć następująco (p oznacza zdanie *będę się uczył*, q zdanie *zdam egzamin z logiki*, r zdanie *zdam egzamin ze statystyki*):

$$p \Rightarrow (q \wedge r),$$

przy czym jak już mówiliśmy nawiasy są niepotrzebne.

Przypuśćmy jednak, że chcemy tak sformułować to zdanie, aby „nawiasy były" w innym miejscu tzn tak:

$$(p \Rightarrow q) \wedge r.$$

Jasne jest, że teraz treść zdania jest inna. Mianowicie teraz nauka gwarantuje zdanie egzaminu z logiki, a egzamin ze statystyki będzie zdany **zawsze**! Można zatem sformułować to dokładnie np. tak:

Jeśli będę się uczył, to zdam egzamin z logiki, natomiast egzamin ze statystyki zdam na pewno.

Ale można to zrobić dużo krócej wykorzystują fakt, że koniunkcja jest przemienna, przenosząc zdanie r na początek a mianowicie:

Zdam egzamin ze statystyki **i** *jeśli będę się uczył, to zdam egzamin z logiki.*

Jest to zatem zdanie

$$r \wedge (p \Rightarrow q)$$

równoważne zdaniu, o które nam chodziło.

Widzimy więc, że efekt nawiasów w mowie potocznej czy literackiej możemy uzyskać wykorzystując szyk zdania!

Oto przykłady zwiazanie z koniunkcją i alternatywą.

Niech p będzie zdaniem: *zdam egzamin z matematyki*, q zdaniem *zdam egzamin z fizyki*, a r zdaniem *zdam egzamin z angielskiego.*

Rozważmy zdanie:

Zdam egzamin z matematyki lub zdam egzamin z fizyki i zdam egzamin z angielskiego.

Nie jest jasne czy chodzi o zdanie

$$(p \vee q) \wedge r,$$

czy o zdanie

$$p \vee (q \wedge r).$$

W wypadku mowy można się wspomóc intonacją, ale co zrobić przy zdaniach pisanych, aby określić czy chodzi o pierwszą czy o drugą sytuację.

Można oczywiście jak w poprzednim przykładzie wpisać do zdania dodatkowe informacje jak:

Zdam egzamin z matematyki lub zdam egzamin z fizyki i **na pewno** *zdam egzamin z angielskiego.* **(pierwszy przypadek).**

albo

Zdam egzamin z matematyki lub **jednocześnie** *zdam egzamin z fizyki i zdam egzamin z angielskiego.* **(drugi przypadek).**

Ale można też rozwiązać te problemy skracając zdania zamiast je wydłużać, a mianowicie:

Zdam egzamin z matematyki lub fizyki i zdam egzamin z angielskiego. **(pierwsze zdanie)**

albo

Zdam egzamin z matematyki lub zdam egzamin z fizyki i z angielskiego. **(drugi przypadek).**

Tu narzędziem precyzującym co z czym najpierw połączyć było użycie wspólnego orzeczenia.

Nie zawsze można użyć wspólnego orzeczenia, ale można wykorzystać inne narzędzia na przykład użycie koniunkcji w postaci kropki i nowego zdania.

Rozpatrzmy kolejnych kilka przykładów¿

Niech p będzie zdaniem: *napiszę podanie*, q zdaniem *podpiszę umowę*, a r zdaniem *złożę wniosek*.

Wówczas zdanie

$$(p \vee q) \wedge r$$

można precyzyjnie zapisać tak.

Napiszę podanie lub podpiszę umowę. Złożę wniosek.

lub w odwrotnej kolejności

Złożę wniosek. Napiszę podanie lub podpiszę umowę.

W przypadku zdania

$$p \vee (q \wedge r)$$

sytuacja jest nieco trudniejsza. Można użyć słówka „jednocześnie" pisząc

Napiszę podanie lub jednocześnie podpiszę umowę i złożę wniosek.

Ale można uzyskać krótkie zdanie wykorzystując wzór

$$(a \vee b) \Leftrightarrow (a' \Rightarrow b).$$

Napiszemy zatem

Jeśli nie napiszę podania, to podpiszę umowę i złożę wniosek.

Wykorzystaliśmy tu zatem możliwość zamiany alternatywy na implikację.

Jeśli nie chcemy zamieniać alternatywy na implikację, to możemy użyć innej pomysłowej metody. Mianowicie wykorzytamy wzór:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

a następnie użyjmy do wyrażenia koniunkcji kropki, średnika albo przecinka. Otrzymamy efekt:

Napiszę podanie lub podpiszę umowę. Napiszę podanie lub złożę wniosek.

Kolejne problemy pjawiają się przy łączeniu implikacji.

Napiszmy zdania

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

oraz

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

Już wiemy, że znaczą co innego. Czysto automatyczne użycie implikacji w postaci zwrotu *jeśli p, to q* prowadzi do niezbyt klarownej sytuacji a mianowicie

Jeśli jeśli napiszę podanie, to podpiszę umowę, to złożę wniosek

w pierwszym przypadku oraz

Jeśli napiszę podanie, to jeśli podpiszę umowę, to złożę wniosek. w drugim przypadku.

Oba zdania są raczej nieczytelne!

Problem można ładnie rozwiązać stosując inne zwroty dla implikacji. I tak w pierwszym przypadku można napisać

Jeśli z tego, że napiszę podanie wynika, że podpiszę umowę, to złożę wniosek.

albo

Jeśli podpiszę umowę, dlatego, że napiszę podanie, to złożę wniosek.

Oba zwroty nie pozostawiają wątpliwości o co chodzi (chociaż nadzwyczaj eleganckie nie są).

Natomiast w drugim przypadku można napisać

Jeśli napiszę podanie, to z tego, że podpiszę umowę wynika, że złożę wniosek

albo

Z tego, że napiszę podanie wynika, że jeśli podpiszę umowę, to złożę wniosek.

Można też posłużyć się zwrotami „bo”, „gdyż”, „więc” uzyskując dobry efekt.

Innym sposobem jest zamiana implikacji na alternatywę, a mianowicie wykorzystanie wzoru

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow p' \vee q.$$

Prowadzi to do równoważności:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p' \vee q) \Rightarrow r].$$

Nie wszystkie nawiasy są niezbędne (które?).

W naszym przypadku zabrzmi to następująco:

Jeśli nie napiszę podania lub podpiszę umowę, to złożę wniosek.

Można zastosować też zamianę implikacji na alternatywę do drugiej implikacji otrzymując

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q)' \vee r].$$

Następnie możemy do zaprzeczenia pierwszej implikacji zastosować tautologię

$$(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow (p \wedge q'),$$

otrzymując

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \wedge q') \vee r].$$

W naszym wypadku da to zdanie:

Złożę wniosek lub jednocześnie napiszę podanie i nie podpiszę umowy.

Widzimy jak daleko pozornie odbiegło to zdanie od początkowego z dwoma implikacjami!

Zadanie: Zrobić podobne przekształcenia dla zdania

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

i zobaczyć jaki to da rezultat w konkretnym przypadku.

TAUTOLOGIE

Tautologia — *zdanie zawsze prawdziwe*

Nazywa się je też **prawami logicznymi.**

Oto najważniejsze prawa:

---

1. Prawo identyczności

$$p \Rightarrow p.$$

---

2. Prawo wyłączonego środka

$$p' \vee p.$$

Nazwa bierze się stąd, że nie ma trzeciej jakby środkowej możliwości:

albo p jest prawdą albo p'.

---

3. Prawo sprzeczności

$$(p \wedge p')'.$$

Teraz grupa praw często stosowanych w dowodach.

4. Prawo Claviusa

$$(p \Rightarrow p') \Rightarrow p',$$

albo jego "odmiana"

$$(p' \Rightarrow p) \Rightarrow p.$$

Oznacza ona w praktyce taką wskazówkę:

Chcesz udowodnić p, wyprowadź p z przypuszczenia, że nie p.

5. Prawo redukcji do absurdu

$$(p \Rightarrow (q \wedge q')) \Rightarrow p'.$$

Prawo to często stosuje się w sądach. Chcemy komuś (np. świadkowi lub oskarżonemu) udowodnić, że mija się z prawdą. Pokazujemy, że z jego wypowiedzi (p) wynikają dwa sprzeczne rezultaty (q i q').

6. Drugie prawo redukcji do absurdu

$$(p \Rightarrow q) \land (p \Rightarrow q') \Rightarrow p'.$$

Jest to w rzeczywistości to samo prawo co poprzednie. Lewe strony są równe, co wynika z rozdzielności implikacji (lewostronnej) względem koniunkcji.

7. Prawa definiowania implikacji

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \lor q),$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \land q')',$$

8. Prawo importacji i eksportacji

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \land q) \Rightarrow r).$$

9. Prawo komutacji

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r)).$$

10. Prawo łączenia koniunkcyjnego stronami

$$((p \Rightarrow r) \land (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \land q) \Rightarrow (r \land s).$$

11. Prawa transpozycji

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p'),$$

$$(p \Rightarrow q') \Leftrightarrow (q \Rightarrow p'),$$

$$(p' \Rightarrow q') \Leftrightarrow (q \Rightarrow p),$$
$$(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p).$$

12. Prawa symplifikacji

$$(p \wedge q) \Rightarrow p,$$
$$q \Rightarrow (p \vee q),$$
$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p).$$

REGUŁY WNIOSKOWANIA

Oparte są na poznanych tautologiach, ich osobne sformułowanie ma charakter raczej "historyczny" i demonstrujący sposób zapisów przez filozofów. Zapis ten jest następujący: Nad kreską wypisujemy założenia, pod kreską tezę.

1. Reguła *modus ponendo ponens*

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

2. Reguła *modus tollendo tollens*

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q' \end{array}}{p'}$$

3. Reguła *modus tollendo ponens*

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ p' \end{array}}{q}$$

4. Reguła *modus ponendo tollens*

$$\frac{\begin{array}{c} p' \vee q' \\ p \end{array}}{q'}$$

5. Reguła opuszczania koniunkcji

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

6. Reguła dołączania koniunkcji

$$\frac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{p \wedge q}$$

7. Reguła dołączania alternatywy

$$\frac{p}{p \vee q}$$

8. Reguła dołączania równoważności

$$\frac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{matrix}}{p \Leftrightarrow q}$$

9. Reguła opuszczania równoważności

$$\frac{p \Leftrightarrow q}{p \Rightarrow q}$$

10. Reguła podwójnej negacji

$$\frac{(p')'}{p}$$

11. Reguła negowania koniunkcji

$$\frac{(p \wedge q)'}{p' \vee q'}$$

12. Reguła negowania alternatywy

$$\frac{(p \vee q)'}{p' \wedge q'}$$

Ostatnie dwie reguły są to prawa de Morgana

13. Reguła negowania implikacji

$$\frac{(p \Rightarrow q)'}{p \wedge q'}$$

14. Reguła negowania równoważności

$$\frac{(p \Leftrightarrow q)'}{p' \Leftrightarrow q}$$

Test na rozumienie implikacji

***	***	***	***
A	B	8	9
***	***	***	***

Każda z kart ma po jednej stronie literę po drugiej liczbę. Spełniona jest reguła

Jeśli po jednej stronie jest samogłoska, to na odwrocie jest liczba nieparzysta

Które karty należy odwrócić, aby sprawdzić, czy reguła ta nie została złamana?