LICZBY ZESPOLONE

Pojęcie liczby zespolonej

Rozważamy zbiór oznaczany $\mathbb{C}$ uporządkowanych par liczb rzeczywistych $z = (x, y)$. Zapisujemy to też w postaci $z = x + yi$. Liczbę x nazywamy *częścią rzeczywistą liczby zespolonej* z, a liczbę y *częścią urojoną liczby rzeczywistej* z. Dla danej liczby $z = x + yi$ liczbę $x - yi$ będziemy nazywać liczbą *sprzężoną do* z i oznaczać $\overline{z}$.

W zbiorze tym wprowadzamy działania

DODAWANIE: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

MNOŻENIE: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

DZIELENIE: $(x_1, y_1) : (x_2, y_2) = \left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}\right)$, (jeśli $x_2^2+y_2^2 > 0$).

Wzorów na dzielenie i mnożenie nie trzeba pamiętać. Wystarczy tylko wiedzieć, że liczba zespolona $i = 0 + 1 \cdot i$ podniesiona do kwadratu daje -1.

Przykład 1. Wykonamy działanie $(3 + 2i) \cdot (1 - 4i)$. Mamy stosując mnożenie każdego składnika w pierwszej liczbie przez każdy w drugiej:

$(3+2i)\cdot(1-4i) = 3\cdot1+3\cdot(-4i)+2i\cdot1+2i\cdot(-4i) = 3-12i+2i+2\cdot(-4)\cdot i^2 = 3 - 10i + (-8) \cdot (-1) = 3 - 10i + 8 = 11 - 10i$.

Przykład 2. Wykonamy działanie $\frac{4-3i}{5+7i}$. W tym celu pomnożymy licznik i mianownik przez liczbę sprzeżoną do mianownika. Mamy

$\frac{4-3i}{5+7i} = \frac{(4-3i)(5-7i)}{(5+7i)(5-7i)} = \frac{20-15i-28i-21}{25+49} = -\frac{1}{74} - \frac{43}{74}i$.

Modułem albo wartością bezwględną liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę rzeczywistą nieujemną $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zauważmy prosty wzór

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

ZADANIA

1. Obliczyć

a) $(3 + 7i) \cdot (2 - 11i)$;

b) $(4 + 8i) : [(3 - 5i) \cdot (1 - i)]$;

2. Znaleźć liczby zespolone u i w takie, że

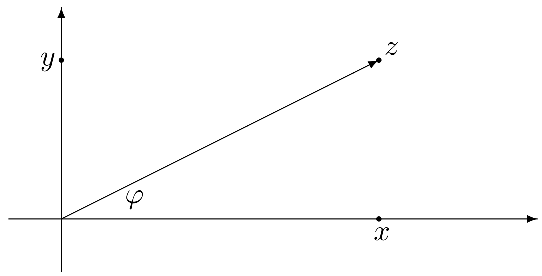
$$\begin{cases} (1+i)u - w = i \\ u + (2+3i)w = 1. \end{cases}$$

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Liczbę zespoloną możemy utożsamić z punktem na płaszczyźnie. Część rzeczywistą x zaznaczamy na osi poziomej, a część urojoną y na osi pionowej. Wtedy $|z|$ jest długością odcinka łączącego punkt z z początkiem układu. Niech φ będzie kątem pomiędzy osią Ox a tym odcinkiem. Wtedy mamy $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$. Możemy zatem zapisać

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Taki zapis liczby zespolonej nazywa się *postacią trygonometryczną liczby zespolonej.* Kąt φ nazywa się *argumentem* liczby zespolonej. Argument jest określony niejednoznacznie. Może różnić się o wielokrotność 2π.



Pomnóżmy przez siebie dwie liczby zespolone zapisane w postaci trygonometrycznej. Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $u = |u|(\cos\xi + i\sin\xi)$. Mamy korzystając z wzorów na sinus i cosinus sumy kątów

$$z \cdot u = |z| \cdot |u|(\cos(\varphi+\xi) + i\sin(\varphi+\xi)).$$

(proszę to sprawdzić!). Otrzymujemy stąd wniosek:

Przy mnożeniu liczb zespolonych moduły się mnożą, zaś argumenty dodają.

Wyciąganie pierwiastków z liczby zespolonej

Z powyższego wniosku łatwo znajdujemy sposób na wyciąganie pierwiastka n - tego stopnia z liczby zespolonej z. Otóz jeśli z ma argument $\varphi \in [0; 2\pi)$, to otrzymujemy dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia dla $k = 1, 2, ..., (n-1)$. Mianowicie z_k ma moduł $\sqrt[n]{|z|}$ i argument $\frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k)$.

Przykład 3. Oblicz pierwiastki kwadratowe z liczby i. Liczba i ma moduł 1 i argument $\frac{\pi}{2}$. Zatem z_1 ma moduł 1 i argument $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \frac{\pi}{4}$, a z_2 ma moduł 1 i argument $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right) = \frac{5}{4}\pi$. Wiedząc, że $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, zas $\sin\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ mamy $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Można było również wyznaczyć te pierwiastki rozwiązując układ równań. Niech bowiem ten pierwiastek jest równy $x + iy$. Mamy zatem $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = i$. Stąd $x^2 + y^2 = 0$ oraz $2xy = 1$. Z pierwszego równania $x = y$ lub $x = -y$. Wstawiając do drugiego mamy $2x^2 = 1$ lub $-2x^2 = 1$. Drugie jest sprzeczne. Zatem $x = y$ i $x^2 = \frac{1}{2}$. Otrzymujemy stąd te same rozwiązania co wyżej.

Przykład 4. Rozwiąż równanie kwadratowe

$$z^2 + (2-i)z - 3i = 0.$$

Rozwiązanie.

Rozwiązujemy je identycznie jak równanie kwadratowe „rzeczywiste”. Liczymy wyróżnik Δ.

$$\Delta = (2-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3i) = 3 + 8i.$$

Następnie obliczamy dwa pierwiastki z Δ. Niech ten pierwiastek jest równy $x + iy$. Otrzymujemy równania $x^2 - y^2 = 3$, $2xy = 8$. Stąd $y = \frac{4}{x}$. Zatem $x^2 - \frac{16}{x^2} = 3$. Wstawiając $t = x^2$ otrzymujemy rzeczywiste równanie kwadratowe $t^2 - 3t - 16 = 0$. Rozwiązaniami są $t_1 = \frac{3-\sqrt{73}}{2}$ i $t_2 = \frac{3+\sqrt{73}}{2}$. Tylko druga liczba jest dodatnia. Stąd $x_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{73}}{2}}$ i $x_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{73}}{2}}$. $y_1 = \frac{4}{x_1}$, $y_2 = \frac{4}{x_2}$. W ten sposób mamy dwa pierwiastki (zespolone!) z Δ: $w_1 = x_1 + y_1 i$, $w_2 = x_2 + y_2 i$. Ostatecznie więc mamy dwa rozwiązania naszego rówania kwadratowego $z_1 = \frac{-(2-i)+w_1}{2}$, $z_2 = \frac{-(2-i)+w_2}{2}$.

ZADANIA

3. Oblicz

a) $(1+i)^{10}$,

b) $(\sqrt{3}+i)^{18}$.

4. Wyznacz pierwiastki trzeciego stopnia z i i pierwiastki czwartego stopnia z -1.

5. Rozwiąż równania kwadratowe

a) $iz^2 + z - (4+i) = 0$,

b) $(1-i)z^2 + (4-i)z + (2-3i)$.