Rozdział 1.

Elementy rachunku zdań i algebry zbiorów

1.1. Zdania

Przez α, β będziemy oznaczać zdania. Każdemu zdaniu możemy przyporządkować **wartość logiczną** 1, gdy jest prawdziwe oraz wartość logiczną 0, gdy jest fałszywe. Oznaczmy wartość logiczną zdania α przez $L(\alpha)$.

PRZYKŁAD 1.1. Jeśli α jest zdaniem *„mucha jest owadem”*, a β zdaniem „$2+2=5$”, to $L(\alpha)=1$, $L(\beta)=0$. $\square$

Ze zdań możemy tworzyć zdania złożone przy pomocy następujących znaków, zwanych **operacjami logicznymi**:

α'	czytamy	*nieprawda, że* α	zaprzeczenie
$\alpha \wedge \beta$	...	α *i* β	koniunkcja
$\alpha \vee \beta$	...	α *lub* β	alternatywa
$\alpha \Rightarrow \beta$	...	*jeśli* α, *to* β	implikacja
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	...	α *wtedy i tylko wtedy gdy* β	równoważność

Dla implikacji w języku polskim stosuje się też inne sformułowania:

„jeżeli α, to β"
„z α wynika β"
„α, więc β"
„ponieważ α, β"
„β, gdyż α"
„β, bo α"
„β, bowiem α"

oraz nieco archaiczne

„α pociąga β"

Również koniunkcję możemy wyrażać w różny sposób. Możemy spójnik „*i*" zastąpić spójnikiem „*oraz*". Rolę koniunkcji pełni też zapisanie zdań zakończonych kropkami obok siebie. Oczywiste jest, że tą samą informację przekazują sformułowania:

Jest zimno i pada deszcz.
Jest zimno oraz pada deszcz.
Jest zimno. Pada deszcz.

W tabelkach widzimy wartości logiczne zdań złożonych w zależności od wartości logicznych zdań α i β.

α	α'
1	0
0	1

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

PRZYKŁAD 1.2. Niech α oznacza zdanie *„Warszawa jest stolicą Polski"*, a β zdanie „$\sqrt{2} > 3$". Skonstruuj zdania α', β', $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$ i ustal ich wartość logiczną.

Rozwiązanie.

α': *nieprawda, że Warszawa jest stolicą Polski,*
β': $\sqrt{2} \leqslant 3$,
$\alpha \wedge \beta$: *Warszawa jest stolicą Polski i* $\sqrt{2} > 3$,
$\alpha \vee \beta$: *Warszawa jest stolicą Polski lub* $\sqrt{2} > 3$,
$\alpha \Rightarrow \beta$: *Jeśli Warszawa jest stolicą Polski, to* $\sqrt{2} > 3$,
$\beta \Rightarrow \alpha$: *Jeśli* $\sqrt{2} > 3$, *to Warszawa jest stolicą Polski,*
$\alpha \Leftrightarrow \beta$: *Warszawa jest stolicą Polski wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sqrt{2} > 3$.

Oczywiście $L(\alpha) = 1$, $L(\beta) = 0$. Wykorzystując tabelki otrzymujemy:

$L(\alpha') = 0$,
$L(\beta') = 1$,
$L(\alpha \wedge \beta) = 0$,
$L(\alpha \vee \beta) = 1$,
$L(\alpha \Rightarrow \beta) = 0$,
$L(\beta \Rightarrow \alpha) = 1$,
$L(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 0$. $\square$

Jeśli ktoś powie zdanie: *Jestem wysoki i gruby*, to zastanówmy się kiedy „złapiemy go na kłamstwie”. Otóż wtedy, gdy okaże się, że nie jest on albo wysoki albo gruby. Jeśli więc jako α oznaczymy zdanie *jestem wysoki,* a jako zdanie β, *jestem gruby*, to intuicja podpowiada nam następującą regułę:

$$(\alpha \wedge \beta)' \Leftrightarrow \alpha' \vee \beta'. \tag{1.1}$$

Podobne rozumowanie doprowadzi i do drugiej reguły:

$$(\alpha \vee \beta)' \Leftrightarrow \alpha' \wedge \beta'. \tag{1.2}$$

Powyższe reguły noszą nazwę **praw de Morgana.** Oczywiście można je było formalnie wyprowadzić wykorzystując podane tabelki.

A oto jak wyglądają inne zaprzeczenia zdań złożonych:

$$(\alpha')' \Leftrightarrow \alpha; \tag{1.3}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta)' \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta'. \tag{1.4}$$

Warto podać jeszcze jedną bardzo ważną regułę:

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\beta' \Rightarrow \alpha'). \tag{1.5}$$

Jest to tak zwana zasada argumentacji nie wprost. Polega ona na następującym toku wnioskowania:

Chcemy wykazać jakąś tezę β. Przyjmujemy za α całą dotychczasową wiedzę. Przypuszczamy, że zdanie β jest fałszywe, czyli, że β' jest prawdziwe. Następnie pokazujemy, że z β' wynika sprzeczność, to znaczy jakiś fałsz w dotychczasowej wiedzy. Ale na mocy prawa de Morgana wynika stąd, że α jest fałszywe. Pokazaliśmy więc $\beta' \Rightarrow \alpha'$, co z zasady argumentacji nie wprost jest równoważne temu, że z całej dotychczasowej wiedzy wynika β.

Reguły logiczne, czyli zdania zawsze prawdziwe nazywa się też **tautologiami**. Na przykład tautologiami są zdania (1.1) – (1.5).

1.2. Kwantyfikatory

Popatrzmy na poniższe zdanie:

Dla każdej liczby dodatniej a istnieje liczba ujemna b taka, że $b^2 = a$.

W zdaniu tym występują dwa zwroty niezwykle często używane przy okazji różnych zdań w matematyce (i nie tylko w matematyce): **dla każdego** *(elementu jakiegoś zbioru)* i **istnieje** *(element jakiegoś zbioru)*. Zwroty te są tak ważne, że wprowadza się dla nich specjalne oznaczenia zwane **kwantyfikatorami**. Mają one postać:

$\bigwedge_{x\in A}$ czytamy *dla każdego x ze zbioru A*,

$\bigvee_{x\in A}$ czytamy *istnieje x ze zbioru A*.

Stosuje się również inne oznaczenia kwantyfikatorów, a mianowicie $\forall$ – zamiast $\bigwedge$ oraz $\exists$ – zamiast $\bigvee$.

Przykład 1.3. Zapiszemy przy pomocy kwantyfikatorów zdanie *„Wszyscy studenci z grupy D1 zdali egzamin z matematyki”*.

Oznaczmy przez $\alpha(x)$ zdanie *„x zdał egzamin z matematyki”.* Wówczas nasze zdanie zapiszemy tak:

$$\bigwedge_{x \in D1} \alpha(x). \quad \square$$

Kwantyfikatory pozwalają zapisywać zdania w sposób skrótowy. Pomagają też tworzyć szybko zaprzeczenia bardziej skomplikowanych zdań.

Zaprzeczenia zdań z użyciem kwantyfikatorów wyglądają bowiem następująco:

$$\left(\bigwedge_{x \in A} \alpha(x)\right)' \Leftrightarrow \bigvee_{x \in A} (\alpha(x))', \tag{1.6}$$

$$\left(\bigvee_{x \in A} \alpha(x)\right)' \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in A} (\alpha(x))'. \tag{1.7}$$

Powyższe równoważności też noszą nazwę **praw de Morgana**.

Przykład 1.4. Zapiszmy przy pomocy kwantyfikatorów zdanie (nieprawdziwe!): *Każda liczba rzeczywista ma pierwiastek.*

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} y^2 = x.$$

A oto uzyskane natychmiast jego zaprzeczenie:

$$\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} y^2 \neq x. \ \square$$

Jako ciekawostkę podajmy, że jest to też duże udogodnienie przy pisaniu takich tekstów, jak powyższy, przy pomocy komputera. Otóż nie trzeba przepisywać jeszcze raz zdania będącego zaprzeczeniem; kopiujemy tylko zdanie wyjściowe a następnie zamieniamy kwantyfikatory na przeciwne i znak równości na znak nierówności.

ZADANIA

1.1. Niech α będzie zdaniem $3 \cdot 4 = 11$, zaś β zdaniem $17 < \sqrt{262}$. Ustalić wartość logiczną zdań: a) $\alpha' \wedge \beta$; b) $\alpha \vee \beta'$; c) $\beta' \Rightarrow \alpha$; d) $\alpha' \Leftrightarrow \beta$.

1.2. Sprawdzić czy poniższe zdania są tautologiami:

a) $(\alpha' \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$; b) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \alpha' \vee \beta$;
c) $(\alpha' \wedge \beta)' \Rightarrow \beta'$; d) $(\alpha' \wedge \beta)' \Leftrightarrow \beta' \vee \alpha$.

1.3. Napisać przy pomocy kwantyfikatorów stwierdzenia:

a) *każda liczba rzeczywista dodatnia ma pierwiastek drugiego stopnia;*

b) *każda liczba rzeczywista dodatnia ma pierwiastek dowolnego stopnia;*

c) *każde równanie liniowe ma rozwiązanie*;

d) *nie każde równanie kwadratowe ma rozwiązanie.*

Rozwiązanie.

a) $\displaystyle\bigwedge_{x>0} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x = y^2.$

b) $\displaystyle\bigwedge_{x>0} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x = y^n.$ $\square$

1.4. Napiszać zaprzeczenie następujących zdań:

a) $(x^2 \geqslant 5) \wedge \big(x < 3 \Rightarrow x^3 \leqslant 7\big)$;

b) $(x < y + 3) \Rightarrow \big(x^2 < y^3 \vee x > y\big)$;

c) $(x = a \vee x = b) \wedge \big(x < a^2 \Rightarrow x > b^2\big)$.

d) $\displaystyle\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{m\in\mathbb{N}} \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} k > n + m,$

e) $\displaystyle\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{m\in\mathbb{N}} x = \frac{n+m}{3},$

f) $\displaystyle\bigvee_{x>1} \bigwedge_{y<x} \bigvee_{m\in\mathbb{N}} (x < y^2) \vee (x = y^m).$

1.3. Zbiory

Pojęcie zbioru pojawiło się w matematyce stosunkowo późno – po roku 1850. Nie będziemy tu zajmować się teorią matematyczną związaną ze zbiorami (tzw. „teoria mnogości”), podamy tylko najprostsze operacje na zbiorach i przede wszystkim poznamy sposoby określania zbiorów.

Sposoby określania zbiorów:

1. Wypisanie elementów zbioru w nawiasach klamrowych: np. $\{1, 2, 5\}$ oznacza zbiór złożony z trzech liczb 1, 2 i 5. Taki sposób stosujemy nie tylko w przypadku zbiorów skończonych, ale często i dla zbiorów nieskończonych. Na przyklad zapis $\{1, 3, 5, \ldots\}$ oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb nieparzystych.

2. Jednoznaczne stwierdzenie, jakim sposobem z pewnego większego zbioru wyróżnia się jego niektóre elementy. Ma to postać:

$$B = \{x \in A : \alpha(x)\}.$$

Oznacza to, że do zbioru B należą te elementy x ze zbioru A, dla których prawdziwe jest zdanie $\alpha(x)$.

PRZYKŁAD 1.5. Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ oznacza zbiór liczb dodatnich, a zbiór $\left\{n \in \mathbb{N} : \bigvee_{m \in \mathbb{N}} n = 3m\right\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3. □

3. Niektóre ważne zbiory mają swoje tradycyjne oznaczenia – jakby „imiona własne”, np. $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}^2$ – plaszczyzna, $\emptyset$ – zbiór pusty, $[a; b]$ lub $\langle a; b\rangle$ – przedział z końcami o lewym końcu a i prawym b, $(a; b)$ – analogiczny przedział bez końców.

Podstawowe działania na zbiorach to **suma mnogościowa** (znak $\cup$), **iloczyn mnogościowy** (znak $\cap$) i **różnica mnogościowa** (znak $\setminus$ lub $-$).

Niech A, B i C oznaczają zbiory.

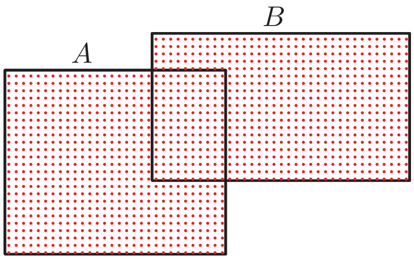
Zbiór $A \cup B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.

PRZYKŁAD 1.6. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$. Wówczas $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. □

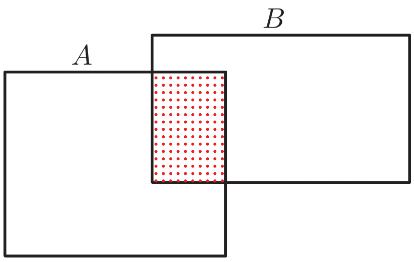
Zbiór $A \cap B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B.

PRZYKŁAD 1.7. Niech $A = (-1; 4]$, $B = (2; 8)$. Wtedy $A \cap B = (2; 4]$. □

Zbiór $A \setminus B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

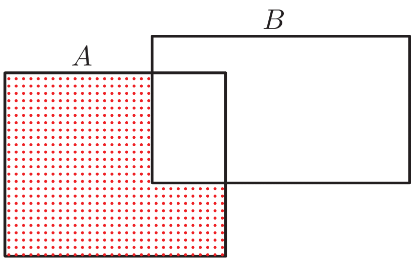


Rysunek 1.1. Suma zbiorów $A \cup B$



Rysunek 1.2. Iloczyn zbiorów: $A \cap B$

PRZYKŁAD 1.8. Niech $A = (-2; 5)$, $B = [0; 6]$. Wówczas $A \setminus B = (-2; 0)$, zaś $B \setminus A = [5; 6]$. $\square$



Rysunek 1.3. Różnica zbiorów: $A \setminus B$

Ważne są następujące wzory:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \tag{1.8}$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \tag{1.9}$$

Wzory powyższe są odpowiednikiem praw de Morgana w rachunku zdań.

ZADANIA

1.5. Niech $A = \{1, 3, 9, 11\}, B = \left\{ n \in \mathbb{N} : \bigvee_{k \in \mathbb{N}} n = 3k \right\}$.
Obliczyć $A \cap B$, $A \setminus B$.

Rozwiązanie.
Zbiór B jest to zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3. Zatem część wspólna zbiorów A i B jest równa $\{3, 9\}$, natomiast $A \setminus B = \{1, 11\}$. $\square$

1.6. Niech $A = \{1, 2, 5, 8\}, B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 < 4n\}$.
Obliczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

1.7. Niech $A = \{2, 5\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{1, 2\}$. Wyznaczyć zbiory:

a) $A \cup B \cup C$;

b) $A \cup (B \setminus C)$;

c) $A \cap (B \setminus (A \cap C))$;

d) $B \cup (A \cap C)$.

1.8. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}, B = \left\{ n \in \mathbb{N} : \bigvee_{m \in \mathbb{N}} n = 2m \right\}$. Wyznaczyć zbiór $A \cap B$.

1.9. Obliczyć z ilu elementów składa się zbiór:

a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 < 7\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 3\}$;

c) $\{n \in \mathbb{N} : 2n^2 - 5n + 2 = 0\}$.

1.10. Niech $A = \{\sqrt{2}, 2, 3\}$, $B =$ zbiór liczb wymiernych, $C = [1; 2)$.
Wyznaczyć zbiory: $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $(B \cup C) \cap A$.

1.4. Iloczyn kartezjański

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór oznaczany $A \times B$ złożony z par (a, b), gdzie $a \in A, b \in B$.

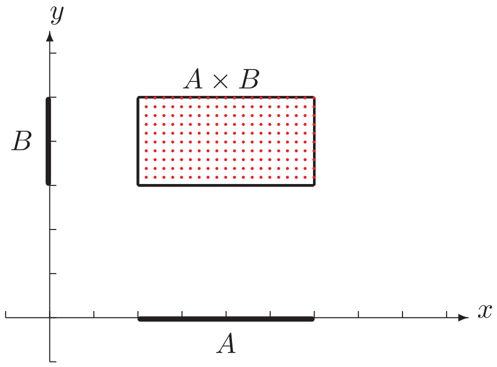
PRZYKŁAD 1.9. Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$. Wtedy

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}. \quad \square$$

Jeśli A ma n elementów, a B ma k elementów, to $A \times B$ ma nk elementów.

Najczęściej używanym iloczynem kartezjańskim jest $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, który utożsamiamy z płaszczyzna dwuwymiarową oznaczaną $\mathbb{R}^2$. Zatem jeśli A i B są podzbiorami $\mathbb{R}$, to $A \times B$ możemy traktować jako podzbiór $\mathbb{R}^2$.

Sytuację tę ilustruje rysunek 1.4. Na osi Ox zaznaczony jest zbiór A będący przedziałem $[2; 6]$, a na osi Oy zbiór B będący przedziałem $[3; 5]$. Wówczas zbiór $A \times B$ jest prostokątem o wierzchołkach $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(6, 3)$ i $(6, 5)$.



Rysunek 1.4.

ZADANIA

1.11. Zaznaczyć na płaszczyźnie iloczyn kartezjański zbiorów:

a) $A = \{1, 2, 3\}, B = [0; 1]$;

b) $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 4\}, B = \{3, 4, 5\}$.

1.12. Zaznaczyć na płaszczyźnie następujące iloczyny kartezjańskie:

a) $[1; 2] \times [1; 3]$, b) $(-2; 2) \times (-2; 2)$,

c) $[0;1] \times \{0,1\}$,

d) $\mathbb{R} \times (0;1)$,

e) $[0;\infty) \times [0;\infty)$,

f) $\{1,2\} \times \mathbb{N}$.

1.13. Jakie z poniżej wymienionych zbiorów można przedstawić jako iloczyn kartezjański $A \times B$, gdzie A i B są podzbiorami prostej $\mathbb{R}$? Znaleźć zbiory A i B.

a) punkt (x_0, y_0),

b) prosta o równaniu $y = 4$,

c) prosta o równaniu $y = x$,

d) kwadrat o wierzchołkach w punktach $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$.

1.5. Zbiór liczb rzeczywistych

Zbiór liczb rzeczywistych będzie grał kluczową rolę w dalszych rozdziałach. Ma on nie tylko własności zbioru, ale posiada liczne inne własności. Jego elementy, czyli liczby, możemy dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić. Możemy je także porównywać, wyznaczać odległość między nimi, ich wartość bezwzględną itp. W związku z tym w zbiorze tym można tworzyć różne wzory przybierające formę równości lub nierówności.

Przypomnijmy kilka ważnych wzorów. Zacznijmy od prostej, ale niezwykle ważnej nierówności zwanej *nierównością trójkąta.* Niech $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1.10}$$

Będziemy tę nierówność wielokrotnie stosować.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy $n!$ (czytamy n silnia) jako $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (przyjmujemy dodatkowo $0! = 1$). Liczba $n!$ ma sens kombinatoryczny. Oznacza bowiem na ile sposobów możemy uszeregować zbiór n-elementowy. Innym ważnym symbolem jest **symbol Newtona** $\binom{n}{k}$ $(n \geqslant k)$. Liczba ta jest równa $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. I ta liczba ma sens praktyczny. Mówi nam ona na ile sposobów ze zbioru n-elementowego możemy wybrać zbiór k-elementowy.

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{N}$. **Dwumianem Newtona** nazywamy wzór

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots \tag{1.11}$$

$$+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{n}a^nb^0.$$

Do zapisywania sumy składającej się z wielu składników często wygodnie jest posługiwać się znakiem $\sum$. Na przykład zapis

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

oznacza sumę

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2.$$

Generalnie zapis

$$\sum_{i=p}^{n} a_i$$

oznacza sumę liczb a_p, a_{p+1}, $a_{p+2}, \ldots$, a_{n-1}, a_n.

Przy użyciu znaku $\sum$ dwumian Newtona wygląda następująco:

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.$$

Przypomnijmy jeszcze następujące wzory znane ze szkoły:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

ZADANIA

1.14. Sprawdzić dwumian Newtona dla $n=2$ i $n=3$; zobaczyć w ten sposób, że jest on uogólnieniem znanych ze szkoły wzorów skróconego mnożenia.

1.15. Obliczyć $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$.

1.16. Niech $a, b > 0$. Pokazać, że ich średnia arytmetyczna jest nie mniejsza od geometrycznej.

1.17. Zapisać przy pomocy znaku $\sum$ następujące sumy:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$;

b) $x+(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-n)$;

c) $1 + 3 + 5 + \cdots + 111$;

d) $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{15}$;

e) $x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + \cdots + (2n+1)x^{2n+1}$.

1.18. Obliczyć:

a) $\sum\limits_{i=1}^{4} i^2$; b) $\sum\limits_{j=3}^{5} (j^3 - j)$; c) $\sum\limits_{k=1}^{6} \frac{1}{k}$.