Dalszy ciąg rachunku zdań

Wszystkie możliwe funktory jednoargumentowe

p	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Wszystkie możliwe funktory dwuargumentowe

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0

Nie wszystkie z tych funktorów są używane w języku. Jak już wiemy w języku matematycznym używa się tylko koniunkcji - f_{12}, alternatywy f_2, implikacji f_4, równoważności f_9.

W języku niematematycznym używa się też operacji:

DYSJUNKCJI – f_5 oznaczanej

$$p|q$$

i czytanej jako

p **bądź** q

lub bądź p bądź q;

Nazywa się ją też kreską Sheffera lub funkcją Sheffera.

ALTERNATYWY ROZŁĄCZNEJ – f_8 oznaczanej

$$p \perp q$$

i czytanej

p **albo** q**;**

BINEGACJI – f_{15} oznaczanej

$$p \downarrow q$$

i czytanej
ani p **ani** q**.**

Łatwo te trzy funktory zapisać przy pomocy klasycznych funktorów logiki matematycznej, a mianowicie

DYSJUNKCJA to zaprzeczenie KONIUNKCJI

czyli

$$(p|q) = (p \wedge q)'$$

ALTERNATYWA ROZŁĄCZNA to zaprzeczenie RÓWNOWAŻNOŚCI

czyli

$$(p \perp q) = (p \Leftrightarrow q)'$$

BINEGACJA to zprzeczenie ALTERNATYWY

czyli

$$(p \downarrow q) = (p \vee q)'$$

Funktor | ma tę własność, że byłby on wystarczający do określenia **wszystkich** pozostałych funktorów!

Wyrażenie negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i alternatywy poprzez funktor |

p'	$p\|p$
$p \wedge q$	$(p\|q)\|(p\|q)$
$p \vee q$	$(p\|p)\|(q\|q)$
$p \Rightarrow q$	$p\|(q\|q)$
$p \Leftrightarrow q$	$\{(p\|q)\|[(p\|p)\|(q\|q)]\}$

PROBLEMY ŁĄCZNOŚCI

Sprawdzimy, które z działań logicznych są łączne

Dla koniunkcji wygląda to tak:

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Sprawdzimy to też dla pozostałych używanych funktorów tzn. alternatywy, implikacji, równoważności, dysjunkcji, alternatywy rozłącznej i binegacji.

PROBLEMY ROZDZIELNOŚCI

Sprawdzimy, które z poniższych zdań są prawami

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

$$p \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r),$$

$$p \vee (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r),$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r),$$

$$p \Rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r),$$

$$(p \vee q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r),$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

PROBLEMY NAWIASÓW

Przyjmuje się, że w pierwszej kolejności wykonujemy negację, potem koniunkcję i alternatywę, przy czym one są równoważne, następnie implikację i na końcu równoważność.

Jednak jak się nie ma pewności, czy można usunąć nawiasy to lepiej je napisać.

Napis

$$q \Rightarrow p \wedge r \Leftrightarrow r \Rightarrow s$$

może się obyć bez nawiasów, jeśli postawimy nawiasy (zachowując to samo znaczenie), to musimy to zrobić tak

$$[q \Rightarrow (p \wedge r)] \Leftrightarrow (r \Rightarrow s).$$

Natomiast napis

$$p \vee q \wedge r$$

jest niepoprawny

Bo jego wartość logiczna może zależeć od tego które działanie zrobimy najpierw.

Załóżmy, że p jest prawdziwe, a q i r fałszywe.

Wtedy zdanie

$$p \vee (q \wedge r)$$

jest prawdziwe, a zdanie

$$(p \vee q) \wedge r$$

jest fałszywe.

Podobnie przy dwóch implikacjach należy postawić nawiasy. Zdanie

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r$$

nie ma sensu, bo dla p, q, r fałszywych zdanie

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

jest prawdziwe, natomiast zdanie

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

jest fałszywe.

W wypadku mowy czy pisma "potocznego" nawiasów się nie używa, dlatego trzeba użyć innych sposobów, aby jednoznacznie wyrazić swoje myśli w omawianych sytuacjach. Rozważmy przykłady.

Rozpatrzmy następujące zdanie:

Jeśli *będę się uczył (p),* **to** *zdam egzamin z logiki (q)* **i** *zdam egzamin ze statystyki (r).*

Zarówno omawiana powyżej zasada o kolejności działań jak i intuicja prowadzi do wniosku, że to zdanie należy zrozumieć następująco (p oznacza zdanie *będę się uczył*, q zdanie *zdam egzamin z logiki*, r zdanie *zdam egzamin ze statystyki*):

$$p \Rightarrow (q \wedge r),$$

przy czym jak już mówiliśmy nawiasy są niepotrzebne.

Przypuśćmy jednak, że chcemy tak sformułować to zdanie, aby „nawiasy były" w innym miejscu tzn tak:

$$(p \Rightarrow q) \wedge r.$$

Jasne jest, że teraz treść zdania jest inna. Mianowicie teraz nauka gwarantuje zdanie egzaminu z logiki, a egzamin ze statystyki będzie zdany **zawsze**! Można zatem sformułować to dokładnie np. tak:

Jeśli będę się uczył, to zdam egzamin z logiki, natomiast egzamin ze statystyki zdam na pewno.

Ale można to zrobić dużo krócej wykorzystują fakt, że koniunkcja jest przemienna, przenosząc zdanie r na początek a mianowicie:

Zdam egzamin ze statystyki **i** *jeśli będę się uczył, to zdam egzamin z logiki.*

Jest to zatem zdanie

$$r \wedge (p \Rightarrow q)$$

równoważne zdaniu, o które nam chodziło.

Widzimy więc, że efekt nawiasów w mowie potocznej czy literackiej możemy uzyskać wykorzystując szyk zdania!

Oto przykłady zwiazanie z koniunkcją i alternatywą.

Niech p będzie zdaniem: *zdam egzamin z matematyki*, q zdaniem *zdam egzamin z fizyki*, a r zdaniem *zdam egzamin z angielskiego.*

Rozważmy zdanie:

Zdam egzamin z matematyki lub zdam egzamin z fizyki i zdam egzamin z angielskiego.

Nie jest jasne czy chodzi o zdanie

$$(p \vee q) \wedge r,$$

czy o zdanie

$$p \vee (q \wedge r).$$

W wypadku mowy można się wspomóc intonacją, ale co zrobić przy zdaniach pisanych, aby określić czy chodzi o pierwszą czy o drugą sytuację.

Można oczywiście jak w poprzednim przykładzie wpisać do zdania dodatkowe informacje jak:

Zdam egzamin z matematyki lub zdam egzamin z fizyki i **na pewno** *zdam egzamin z angielskiego.* **(pierwszy przypadek).**

albo

Zdam egzamin z matematyki lub **jednocześnie** *zdam egzamin z fizyki i zdam egzamin z angielskiego.* **(drugi przypadek).**

Ale można też rozwiązać te problemy skracając zdania zamiast je wydłużać, a mianowicie:

Zdam egzamin z matematyki lub fizyki i zdam egzamin z angielskiego. **(pierwsze zdanie)**

albo

Zdam egzamin z matematyki lub zdam egzamin z fizyki i z angielskiego. **(drugi przypadek).**

Tu narzędziem precyzującym co z czym najpierw połączyć było użycie wspólnego orzeczenia.

Nie zawsze można użyć wspólnego orzeczenia, ale można wykorzystać inne narzędzia na przykład użycie koniunkcji w postaci kropki i nowego zdania.

Rozpatrzmy kolejnych kilka przykładów¿

Niech p będzie zdaniem: *napiszę podanie*, q zdaniem *podpiszę umowę*, a r zdaniem *złożę wniosek*.

Wówczas zdanie

$$(p \vee q) \wedge r$$

można precyzyjnie zapisać tak.

Napiszę podanie lub podpiszę umowę. Złożę wniosek.

lub w odwrotnej kolejności

Złożę wniosek. Napiszę podanie lub podpiszę umowę.

W przypadku zdania

$$p \vee (q \wedge r)$$

sytuacja jest nieco trudniejsza. Można użyć słówka „jednocześnie” pisząc

Napiszę podanie lub jednocześnie podpiszę umowę i złożę wniosek.

Ale można uzyskać krótkie zdanie wykorzystując wzór

$$(a \vee b) \Leftrightarrow (a' \Rightarrow b).$$

Napiszemy zatem

Jeśli nie napiszę podania, to podpiszę umowę i złożę wniosek.

Wykorzystaliśmy tu zatem możliwość zamiany alternatywy na implikację.

Napiszmy zdania

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

oraz

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

Już wiemy, że znaczą co innego. Czysto automatyczne użycie implikacji w postaci zwrotu *jeśli* p*, to* q prowadzi do niezbyt klarownej sytuacji a mianowicie

Jeśli jeśli napiszę podanie, to podpiszę umowę, to złożę wniosek w pierwszym przypadku oraz

Jeśli napiszę podanie, to jeśli podpiszę umowę, to złożę wniosek. w drugim przypadku.

Oba zdania są raczej nieczytelne!

Problem można ładnie rozwiązać stosując inne zwroty dla implikacji. I tak w pierwszym przypadku można napisać

Jeśli z tego, że napiszę podanie wynika, że podpiszę umowę, to złożę wniosek.

albo

Jeśli podpiszę umowę, dlatego, że napiszę podanie, to złożę wniosek.

Oba zwroty nie pozostawiają wątpliwości o co chodzi (chociaż nadzwyczaj eleganckie nie są).

Natomiast w drugim przypadku można napisać

Jeśli napiszę podanie, to z tego, że podpiszę umowę wynika, że złożę wniosek

albo

Z tego, że napiszę podanie wynika, że jeśli podpiszę umowę, to złożę wniosek.

Można też posłużyć się zwrotami „bo”, „gdyż”, „więc” uzyskując dobry efekt.

Innym sposobem jest zamiana implikacji na alternatywę, a mianowicie wykorzystanie wzoru

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow p' \vee q.$$

Prowadzi to do równoważności:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p' \vee q) \Rightarrow r].$$

Nie wszystkie nawiasy są niezbędne (które?).

W naszym przypadku zabrzmi to następująco:

Jeśli nie napiszę podania lub podpiszę umowę, to złożę wniosek.

Można zastosować też zamianę implikacji na alternatywę do drugiej implikacji otrzymując

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q)' \vee r].$$

Następnie możemy do zaprzeczenia pierwszej implikacji zastosować tautologię

$$(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow (p \wedge q'),$$

otrzymując

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \wedge q') \vee r].$$

W naszym wypadku da to zdanie:

Złożę wniosek lub jednocześnie napiszę podanie i nie podpiszę umowy.

Widzimy jak daleko pozornie odbiegło to zdanie od początkowego z dwoma implikacjami!

Zadanie: Zrobić podobne przekształcenia dla zdania

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

i zobaczyć jaki to da rezultat w konkretnym przypadku.

TAUTOLOGIE

Tautologia — *zdanie zawsze prawdziwe*

Nazywa się je też **prawami logicznymi.**

Oto najważniejsze prawa:

1. Prawo identyczności

$$p \Rightarrow p.$$

---

2. Prawo wyłączonego środka

$$p' \vee p.$$

Nazwa bierze się stąd, że nie ma trzeciej jakby środkowej możliwości:

albo p jest prawdą albo p'.

---

3. Prawo sprzeczności

$$(p \wedge p')'.$$

Teraz grupa praw często stosowanych w dowodach.

---

4. Prawo Claviusa

$$(p \Rightarrow p') \Rightarrow p',$$

albo jego "odmiana"

$$(p' \Rightarrow p) \Rightarrow p.$$

Oznacza ona w praktyce taką wskazówkę:

Chcesz udowodnić p, wyprowadź p z przypuszczenia, że nie p.

5. Prawo redukcji do absurdu

$$(p \Rightarrow (q \wedge q')) \Rightarrow p'.$$

Prawo to często stosuje się w sądach. Chcemy komuś (np. świadkowi lub oskarżonemu) udowodnić, że mija się z prawdą. Pokazujemy, że z jego wypowiedzi (p) wynikają dwa sprzeczne rezultaty (q i q').

6. Drugie prawo redukcji do absurdu

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow q') \Rightarrow p'.$$

Jest to w rzeczywistości to samo prawo co poprzednie. Lewe strony są równe, co wynika z rozdzielności implikacji (lewostronnej) względem koniunkcji.

7. Prawa definiowania implikacji

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q),$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q')',$$

8. Prawo importacji i eksportacji

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r).$$

9. Prawo komutacji

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r)).$$

10. Prawo łączenia koniunkcyjnego stronami

$$((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s).$$

11. Prawa transpozycji

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p'),$$

$$(p \Rightarrow q') \Leftrightarrow (q \Rightarrow p'),$$
$$(p' \Rightarrow q') \Leftrightarrow (q \Rightarrow p),$$
$$(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p).$$

12. Prawa symplifikacji

$$(p \wedge q) \Rightarrow p,$$

$$q \Rightarrow (p \vee q),$$
$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p).$$

REGUŁY WNIOSKOWANIA

Oparte są na poznanych tautologiach, ich osobne sformułowanie ma charakter raczej "historyczny" i demonstrujący sposób zapisów przez filozofów. Zapis ten jest następujący: Nad kreską wypisujemy założenia, pod kreską tezę.

1. Reguła *modus ponendo ponens*

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

2. Reguła *modus tollendo tollens*

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q' \\ \hline p' \end{array}$$

3. Reguła *modus tollendo ponens*

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p' \\ \hline q \end{array}$$

4. Reguła *modus ponendo tollens*

$$\begin{array}{c} p' \vee q' \\ p \\ \hline q' \end{array}$$

5. Reguła opuszczania koniunkcji

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

6. Reguła dołączania koniunkcji

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

7. Reguła dołączania alternatywy

$$\frac{p}{p \vee q}$$

8. Reguła dołączania równoważności

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{array}}{p \Leftrightarrow q}$$

9. Reguła opuszczania równoważności

$$\frac{p \Leftrightarrow q}{p \Rightarrow q}$$

10. Reguła podwójnej negacji

$$\frac{(p')'}{p}$$

11. Reguła negowania koniunkcji

$$\frac{(p \wedge q)'}{p' \vee q'}$$

12. Reguła negowania alternatywy

$$\frac{(p \vee q)'}{p' \wedge q'}$$

Ostatnie dwie reguły są to prawa de Morgana

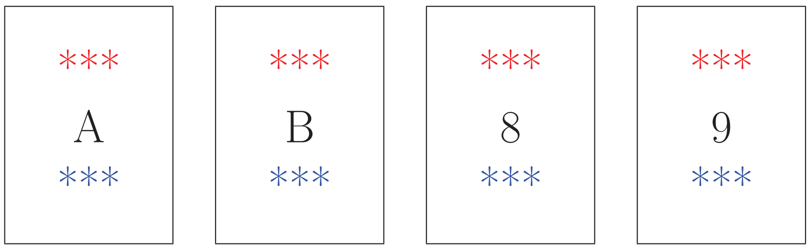
13. Reguła negowania implikacji

$$\frac{(p \Rightarrow q)'}{p \wedge q'}$$

14. Reguła negowania równoważności

$$\frac{(p \Leftrightarrow q)'}{p' \Leftrightarrow q}$$

Test na rozumienie implikacji



Każda z kart ma po jednej stronie literę po drugiej liczbę. Spełniona jest reguła

Jeśli po jednej stronie jest samogłoska, to na odwrocie jest liczba nieparzysta

Które karty należy odwrócić, aby sprawdzić, czy reguła ta nie została złamana?