Elementy logiki matematycznej

Przez p, q będziemy oznaczać zdania. Każdemu zdaniu możemy przyporządkować **wartość logiczną** 1, gdy jest prawdziwe oraz wartość logiczną 0, gdy jest fałszywe. Oznaczmy wartość logiczną zdania p przez $L(p)$.

PRZYKŁAD. Jeśli p jest zdaniem *„mucha jest owadem”*, a q zdaniem „$2+2=5$”, to $L(p)=1$, $L(q)=0$.

Ze zdań możemy tworzyć zdania złożone przy pomocy następujących znaków, zwanych **operacjami logicznymi**: (nie są to jedyne operacje logiczne, ale te wykorzystuje się w logice matematycznej - inne poznamy potem).

p'	czytamy	*nieprawda, że p*	*zaprzeczenie*
$p \wedge q$	...	*p i q*	*koniunkcja*
$p \vee q$	...	*p lub q*	*alternatywa*
$p \Rightarrow q$	...	*jeśli p, to q*	*implikacja*
$p \Leftrightarrow q$	...	*p wtedy i tylko wtedy gdy q*	równoważność

Dla implikacji w języku polskim stosuje się też inne sformułowania m.in.:

„jeżeli p, to q”
„z p wynika q”
„p, więc q”
„ponieważ p, q”
„q, gdyż p”
„q, bo p”
„q, bowiem p”

oraz nieco archaiczne

„p pociąga q”

Również koniunkcję możemy wyrażać w różny sposób. Możemy spójnik „*i*” zastąpić spójnikiem „*oraz*”. Rolę koniunkcji pełni też zapisanie zdań zakończonych kropkami (lub przecinkami) obok siebie. Oczywiste jest, że tą samą informację przekazują sformułowania:

Jest zimno i pada deszcz.
Jest zimno oraz pada deszcz.
Jest zimno. Pada deszcz.
Jest zimno, pada deszcz.

Zdarza się też, że to jaką rolę pełni dany spójnik zależy od kontekstu. Np. w zdaniu:

Nie zdam egzaminu i będę powtarzać rok

spójnik "i" formalnie przypisany koniunkcji pełni rolę bardziej implikacji niż koniunkcji.

W tabelkach widzimy wartości logiczne zdań złożonych w zależności od wartości logicznych zdań p i q.

p	p'
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

PRZYKŁAD. Niech p oznacza zdanie *„Warszawa jest stolicą Polski"*, a q zdanie „$\sqrt{2} > 3$". Skonstruuj zdania p', q', $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$ i ustal ich wartość logiczną.

Rozwiązanie.
p': *nieprawda, że Warszawa jest stolicą Polski*,
q': $\sqrt{2} \leqslant 3$,
$p \wedge q$: *Warszawa jest stolicą Polski i* $\sqrt{2} > 3$,
$p \vee q$: *Warszawa jest stolicą Polski lub* $\sqrt{2} > 3$,
$p \Rightarrow q$: *Jeśli Warszawa jest stolicą Polski, to* $\sqrt{2} > 3$,
$q \Rightarrow p$: *Jeśli* $\sqrt{2} > 3$, *to Warszawa jest stolicą Polski*,
$p \Leftrightarrow q$: *Warszawa jest stolicą Polski wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sqrt{2} > 3$.

Oczywiście $L(p) = 1$, $L(q) = 0$. Wykorzystując tabelki otrzymujemy:
$L(p') = 0$,

$L(q') = 1,$
$L(p \wedge q) = 0,$
$L(p \vee q) = 1,$
$L(p \Rightarrow q) = 0,$
$L(q \Rightarrow p) = 1,$
$L(p \Leftrightarrow q) = 0.$

Jeśli ktoś powie zdanie: *Jestem wysoki i gruby*, to zastanówmy się kiedy „złapiemy go na kłamstwie". Otóż wtedy, gdy okaże się, że nie jest on albo wysoki albo gruby. Jeśli więc jako p oznaczymy zdanie *jestem wysoki,* a jako zdanie q, *jestem gruby*, to intuicja podpowiada nam następującą regułę:

$$(p \wedge q)' \Leftrightarrow p' \vee q'.$$

Podobne rozumowanie doprowadzi i do drugiej reguły:

$$(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'.$$

Powyższe reguły noszą nazwę **praw de Morgana.** Oczywiście można je było formalnie wyprowadzić wykorzystując podane tabelki.

A oto jak wyglądają inne zaprzeczenia zdań złożonych:

$$(p')' \Leftrightarrow p;$$

$$(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow p \wedge q'.$$

Warto podać jeszcze jedną bardzo ważną regułę:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p').$$

Jest to tak zwana zasada argumentacji nie wprost. Polega ona na następującym toku wnioskowania:

Chcemy wykazać jakąś tezę q. Przyjmujemy za p całą dotychczasową wiedzę. Przypuszczamy, że zdanie q jest fałszywe, czyli, że q' jest prawdziwe.

Następnie pokazujemy, że z q' wynika sprzeczność, to znaczy jakiś fałsz w dotychczasowej wiedzy. Ale na mocy prawa de Morgana wynika stąd, że p jest fałszywe. Pokazaliśmy więc $q' \Rightarrow p'$, co z zasady argumentacji nie wprost jest równoważne temu, że z całej dotychczasowej wiedzy wynika q.

Reguły logiczne, czyli zdania zawsze prawdziwe nazywa się też **tautologiami**. Na przykład tautologiami są zdania (1.1): (1.5).

Zajmiemy się tautologiami w dalszej "niematematycznej" części wykładu.

Algebraiczne wzory na operacje logiczne

Czasami, przy wyprowadzaniu praw logicznych zamiast pisać tabelki wygodniej będzie przedstawić i zastosować "algebraiczne" wzory na operacje logiczne. Oto one

zaprzeczenie: $1-p$

koniunkcja: pq

alternatywa: $p+q-pq$

implikacja: $1-p+pq$

równoważność: $1-(p-q)^2$.

Spróbujemy np. udowodnić prawo

$$[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)].$$

W zapisie algebraicznym mamy

Lewa strona: $pq+r-pqr$

Prawa strona: $(p+r-pr)(q+r-qr)$

Przekształcamy prawą stronę

$$(p+r-pr)(q+r-qr) = pq+pr-pqr+rq+r^2-qr^2-pqr-pr^2+pqr^2.$$

Korzystamy z tego, że $p^2 = p,\ q^2 = q,\ r^2 = r$ i otrzymujemy

$$pq + r - pqr,$$

czyli lewą stronę.

Kwantyfikatory

Popatrzmy na poniższe zdanie:

Dla każdej liczby dodatniej a istnieje liczba ujemna b taka, że $b^2 = a$.

W zdaniu tym występują dwa zwroty niezwykle często używane przy okazji różnych zdań w matematyce (i nie tylko w matematyce): **dla każdego** *(elementu jakiegoś zbioru)* i **istnieje** *(element jakiegoś zbioru)*. Zwroty te są tak ważne, że wprowadza się dla nich specjalne oznaczenia zwane **kwantyfikatorami**. Mają one postać:

$$\bigwedge_{x\in A} \quad \text{czytamy} \quad \textit{dla każdego } x \textit{ ze zbioru } A,$$

$$\bigvee_{x\in A} \quad \text{czytamy} \quad \textit{istnieje } x \textit{ ze zbioru } A.$$

Stosuje się również inne oznaczenia kwantyfikatorów, a mianowicie $\forall$: zamiast $\bigwedge$ oraz $\exists$: zamiast $\bigvee$.

PRZYKŁAD. Zapiszemy przy pomocy kwantyfikatorów zdanie *„Wszyscy studenci z grupy D1 zdali egzamin z matematyki”*.

Oznaczmy przez $p(x)$ zdanie *„x zdał egzamin z matematyki”*. Wówczas nasze zdanie zapiszemy tak:

$$\bigwedge_{x\in D1} p(x).$$

W języku potocznym rolę kwantyfikatorów pełnią m.in. słowa:

każdy, wszystko, wszyscy, zawsze, wszędzie, nic, nigdy, nigdzie: kwantyfikator $\bigwedge$;

coś, ktoś, kiedyś, gdzieś, jakiś, przynajmniej raz: kwantyfikator $\bigvee$.

Kwantyfikatory pozwalają zapisywać zdania w sposób skrótowy. Pomagają też tworzyć szybko zaprzeczenia bardziej skomplikowanych zdań.

Zaprzeczenia zdań z użyciem kwantyfikatorów wyglądają bowiem następująco:

$$\left(\bigwedge_{x\in A} p(x)\right)' \Leftrightarrow \bigvee_{x\in A} (p(x))',$$

$$\left(\bigvee_{x\in A} p(x)\right)' \Leftrightarrow \bigwedge_{x\in A} (p(x))'.$$

Powyższe równoważności też noszą nazwę **praw de Morgana**.

PRZYKŁAD. Zapiszmy przy pomocy kwantyfikatorów zdanie (nieprawdziwe!):

Każda liczba rzeczywista ma pierwiastek.

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} y^2 = x.$$

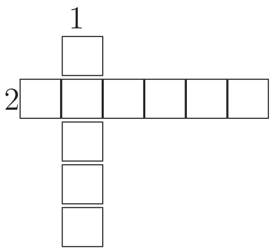
A oto uzyskane natychmiast jego zaprzeczenie:

$$\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{y\in\mathbb{R}} y^2 \neq x.$$

Jeśli Żeromski miał na imię Stefan, to mysikrólik jest ptakiem

Czy to jest sensowna implikacja? Wydaje się, że nie ma to specjalnego sensu, jednak można wymyślić taką sytuację, że zdanie to będzie całkiem logiczne. Oto ona:

Wybraźmy sobie taką krzyżowkę



1 pionowo: Rząd kręgowców, do którego zalicza się mysikrólik.
2 poziomo: Imię autora „Przedwiośnia".

Ewa rozwiązuje krzyżowkę, Adam siedzi obok. Oto hipotetyczny dialog:

E: Kto napisał Przedwiośnie?

A: Żeromski.

E: Jak miał na imię?

A: Dokładnie nie pamiętam, ale albo Oswald albo Stefan. Jestem prawie pewien, że Stefan.

E: Czy mysikrólik jest ssakiem?

A: Coś ma wspólnego z myszą i z królikiem to pewnie ssak, ale coś mi się kojarzy, że może być ptakiem.

E. To by mi pasowało do Stefana.

Ewa wpisuje hasła jak poniżej i mówi

		1				
		P				
2	S	T	E	F	A	N
		A				
		K				
		I				

Jeśli Żeromski miał na imię Stefan, to mysikrólik jest ptakiem

Zbiory

Pojęcie zbioru pojawiło się stosunkowo późno – po roku 1850. Nie będziemy tu zajmować się teorią matematyczną związaną ze zbiorami (tzw. „teoria mnogości"), podamy tylko najprostsze operacje na zbiorach i przede wszystkim poznamy sposoby określania zbiorów.

Sposoby określania zbiorów:

1. Wypisanie elementów zbioru w nawiasach klamrowych: np. $\{1, 2, 5\}$ oznacza zbiór złożony z trzech liczb 1, 2 i 5. Taki sposób stosujemy nie tylko w przypadku zbiorów skończonych, ale często i dla zbiorów nieskończonych. Na przyklad zapis $\{1, 3, 5, \ldots\}$ oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb nieparzystych.

2. Jednoznaczne stwierdzenie, jakim sposobem z pewnego większego zbioru wyróżnia się jego niektóre elementy. Ma to postać:

$$B = \{x \in A : \alpha(x)\}.$$

Oznacza to, że do zbioru B należą te elementy x ze zbioru A, dla których prawdziwe jest zdanie $\alpha(x)$.

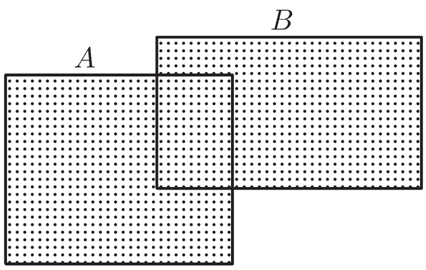
PRZYKŁAD. Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ oznacza zbiór liczb dodatnich, a zbiór $\left\{n \in \mathbb{N} : \bigvee_{m \in \mathbb{N}} n = 3m\right\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3.

3. Niektóre ważne zbiory mają swoje tradycyjne oznaczenia – jakby „imiona własne”, np. $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}^2$ – plaszczyzna, $\emptyset$ – zbiór pusty, $[a;b]$ lub $\langle a;b\rangle$ – przedział z końcami o lewym końcu a i prawym b, $(a;b)$ – analogiczny przedział bez końców.

Podstawowe działania na zbiorach to **suma mnogościowa** (znak $\cup$), **iloczyn mnogościowy** (znak $\cap$) i **różnica mnogościowa** (znak $-$ lub $-$).

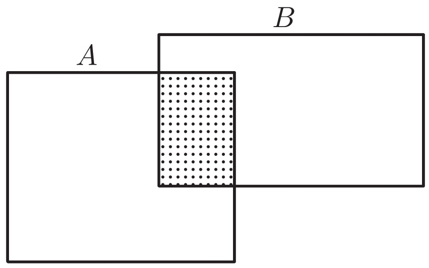
Niech A, B i C oznaczają zbiory.

Zbiór $A \cup B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.



Suma zbiorów $A \cup B$

PRZYKŁAD. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$. Wówczas $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Zbiór $A \cap B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B.

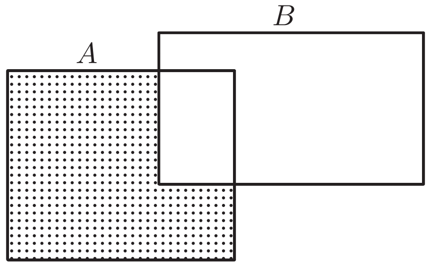


Iloczyn zbiorów: $A \cap B$

PRZYKŁAD. Niech $A = (-1; 4]$, $B = (2; 8)$. Wtedy $A \cap B = (2; 4]$.

Zbiór $A - B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

PRZYKŁAD. Niech $A = (-2; 5)$, $B = [0; 6]$. Wówczas $A - B = (-2; 0)$, zaś $B - A = [5; 6]$.



Różnica zbiorów: $A - B$

Ważne są następujące wzory (tzw. prawa de Morgana):

$$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B),$$

$$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B).$$

Jeśli zbiór C rozpatrywany powyżej jest zbiorem wszystkich elementów – nazywamy go wówczas **uniwersum**, to zbiór $C - A$ oznaczamy A' i nazywamy go **uzupełnieniem zbioru A.**

Wtedy prawa de Morgana zapiszemy następująco:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

ZADANIE. Niech $A = \{1, 3, 9, 11\}$, $B = \left\{n \in \mathbb{N} : \bigvee_{k \in \mathbb{N}} n = 3k\right\}$. Obliczyć $A \cap B$, $A - B$.

Rozwiązanie.

Zbiór B jest to zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3. Zatem część wspólna zbiorów A i B jest równa $\{3, 9\}$, natomiast $A - B = \{1, 11\}$.

Iloczyn kartezjański

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór oznaczany $A \times B$ złożony z par (a, b), gdzie $a \in A, b \in B$.

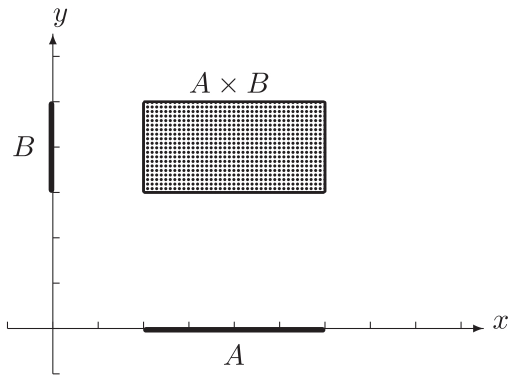
PRZYKŁAD. Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$. Wtedy

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Jeśli A ma n elementów, a B ma k elementów, to $A \times B$ ma nk elementów.

Najczęściej używanym iloczynem kartezjańskim jest $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, który utożsamiamy z płaszczyzna dwuwymiarową oznaczaną $\mathbb{R}^2$. Zatem jeśli A i B są podzbiorami $\mathbb{R}$, to $A \times B$ możemy traktować jako podzbiór $\mathbb{R}^2$.

Sytuację tę ilustruje rysunek. Na osi Ox zaznaczony jest zbiór A będący przedziałem $[2; 6]$, a na osi Oy zbiór B będący przedziałem $[3; 5]$. Wówczas zbiór $A \times B$ jest prostokątem o wierzchołkach $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(6, 3)$ i $(6, 5)$.



ANTYNOMIA RUSSELA

Rozważamy różne zbiory. M. in. zbiory, których elementami są też zbiory. Np.

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 5, A\}$$
$$C = \{3, A, B, C\}$$

Ostatni zapis oznacza, że sam zbiór C jest elementem zbioru C. Na tym ostatnim przykładzie opiera się paradoks Russela.

Nazwiemy zbiór A **normalnym**, jeśli $A \notin A$. Czyli np. w powyższych przykładach A i B są normalne, a C nie jest. Niech N będzie zbiorem wszystkich zbiorów normalnych.

Pytanie

CZY $N \in N$?

Jeśli $N \in N$, to N **nie jest** normalny, czyli $N \notin N$!!!

Jeśli $N \notin N$, to N **jest** normalny, a każdy zbiór normalny jest elementem N, czyli $N \in N$!!!