1.1. Elementy kombinatoryki

Przypomnimy podstawowe wzory potrzebne w dalszych rozważaniach.

Permutacja. Permutacją nazywamy dowolne odwzorowanie różnowartościowe zbioru n-elementowego w zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$. Liczba n-elementowych permutacji wyraża się wzorem:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \tag{1.1}$$

Z permutacją mamy do czynienia wtedy, gdy pytamy się na ile sposobów można ustawić jakiś zbiór różnych elementów w szereg.

PRZYKŁAD 1. W finale biegu na 100 metrów startują czterej biegacze. Ile jest wszystkich możliwych rezultatów biegu?

Rozwiązanie.

Wszystkich rezultatów będzie 4!, czyli 24. □

Kombinacja. Jest to k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego. Liczba takich podzbiorów wyraża się wzorem

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.2}$$

PRZYKŁAD 2. Spośród 10 osób mamy wybrać trzyosobową delegację. Na ile sposobów możemy to zrobić?

R o z w i ą z a n i e.

Możemy to zrobić na $C_{10}^{3} = \binom{10}{3}$ sposobów czyli $\frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ sposobów. $\square$

PRZYKŁAD 3. Dietetycy sugerują, że każdy człowiek powinien w ciągu dnia zjeść co najmniej 4 potrawy z mleka, dwie potrawy mięsne, 3 potrawy z owoców i warzyw i 4 potrawy mączne. Przypuśćmy, że stołówka dysponuje 6 potrawami mlecznymi, 10 potrawami mięsnymi, 7 potrawami z owoców i warzyw i 5 potrawami mącznymi. Ile można utworzyć zestawów potraw zgodnych z zaleceniami dietetyków?

R o z w i ą z a n i e.

Aby rozwiązać to zadanie, trzeba obliczyć liczbę kombinacji w każdej grupie potraw, a potem otrzymane wyniki przemnożyć. I tak liczba możliwości w grupie mlecznej wynosi $C_6^4 = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15$. Liczba możliwości w grupie mięsnej wynosi $C_{10}^2 = \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 45$. Liczba możliwości w grupie owocowo-warzywnej wynosi $C_7^3 = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$. Liczba możliwości w grupie mącznej wynosi $C_5^4 = 5$. Ostatecznie otrzymujemy wynik: wszystkich zestawów potraw jest

$$15 \cdot 45 \cdot 35 \cdot 5 = 118125. \ \square$$

Wariacja bez powtórzeń. Jest to odwzorowanie różnowartościowe zbioru k-elementowego w zbiór n-elementowy ($k \leqslant n$). Liczba takich odwzorowań wyraża się wzorem

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.3}$$

PRZYKŁAD 4. W wyścigach konnych typuje się kolejność trzech pierwszych koni. W wyścigu startuje 8 koni. Ile jest możliwych typów?

Rozwiązanie.

Typów jest $A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$. $\Box$

Wariacja z powtórzeniami to dowolne (niekoniecznie różnowartościowe) odwzorowanie zbioru k-elementowego w zbiór n-elementowy. Liczba takich odwzorowań jest równa n^k.

PRZYKŁAD 5. W grupie jest 5 studentów: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5. Trzeba ich podzielić na dwie podgrupy angielską i francuską - każdy z nich może wybrać jeden język spośród dwóch. Ile jest wszystkich możliwych podziałów?

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez X zbiór $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, a przez Y zbiór $\{A, F\}$. Każdemu studentowi (czyli elementowi zbioru X) przyporządkowujemy wybrany język (a więc element zbioru Y). Zatem wszystkich podziałów jest tyle, ile funkcji ze zbioru X $(k = 5)$ w zbiór Y $(n = 2)$, a więc $2^5 = 32$. $\square$

1.2. Wzór Stirlinga

Bezpośrednie obliczanie powyższych wyrażeń dla dużych n i k może być trudne i nieosiągalne nawet dla komputerów - liczby $n!$ są olbrzymie. Dużą pomocą może być oczywiście logarytmowanie. Na przykład liczbę

$$p = \frac{\binom{50}{10}\binom{50}{15}}{\binom{100}{25}}$$

można policzyć następująco. Najpierw obliczamy $\ln p$:

$$\ln p = [2(\ln 1 + \cdots + \ln 50) - (\ln 1 + \cdots + \ln 10) - (\ln 1 + \cdots + \ln 40) - (\ln 1 + \cdots + \ln 15) - (\ln 1 + \cdots + \ln 35)] - [(\ln 1 + \cdots + \ln 100) - (\ln 1 + \cdots + \ln 25) - (\ln 1 + \cdots + \ln 75)].$$

Następnie obliczamy $p = e^{\ln p}$. Jeśli mamy do dyspozycji komputery nie jest to bardzo trudne, choć dla jeszcze większych n, np. równych wielu milionom, a takie sytuacje często się w praktyce zdarzają, byłoby już to skomplikowane nawet dla nowoczesnych maszyn.

Istnieje szybsza metoda, pozwalająca wykonywać przybliżone obliczenia wyrażeń, w których występują silnie. Oparta jest ona na wzorze szkockiego matematyka J. Stirlinga. Wzór ten mówi, że ciąg

$$a_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$$

dąży do 1.

Oznacza to, że dla dużych n mamy

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}. \tag{1.4}$$

Zastosujmy ten wzór do poniższego przykładu będącego uogólnieniem przykładu poprzedniego

$$p = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Z wzoru Stirlinga dla każdego $u \geqslant v,\ u, v \in \mathbb{N}$ mamy

$\ln \binom{u}{v} \approx [u \ln u \ - u \ + \ln(\sqrt{2\pi u})] - [v \ln v - v + \ln(\sqrt{2\pi v})]$
$- [(u-v)\ln(u-v) - (u-v) + \ln(\sqrt{2\pi(u-v)})]$
$= [u \ln u \ + \ln(\sqrt{2\pi u}) - [v \ln v + \ln(\sqrt{2\pi v})]$
$- [(u-v)\ln(u-v) + \ln(\sqrt{2\pi(u-v)})]$.

Zatem

$\ln p \approx [M \ln M + \ln(\sqrt{2\pi M}) - k \ln k - \ln(\sqrt{2\pi k}) - (M-k)\ln(M-k) - \ln(\sqrt{2\pi(M-k)})] + [(N-M)\ln(N-M) + \ln(\sqrt{2\pi(N-M)}) - (n-k)\ln(n-k) - \ln(\sqrt{2\pi(n-k)}) - (N-M-(n-k))\ln(N-M-(n-k)) - \ln(\sqrt{2\pi(N-M-(n-k))})] - [N \ln N + \ln(\sqrt{2\pi N}) - n \ln n - \ln(\sqrt{2\pi n}) - (N-n)\ln(N-n) - \ln(\sqrt{2\pi(N-n)})]$.

Liczba składników w powyższym wzorze jest równa zawsze 18 w przeciwieństwie do poprzedniej metody, gdzie jest proporcjonalna do liczb występujących we wzorze.