INDUKCJA MATEMATYCZNA

Zasada indukcji matematycznej.

Niech $T(n)$ będzie pewnym zdaniem zależnym od liczby naturalnej n. Mamy udowodnić jego prawdziwosc dla każdego n.

KROK 1. Dowodzimy (sprawdzamy) prawdziwość zdania $T(1)$

KROK 2. Dowodzimy implikację: *dla każdego n z prawdziwośći $T(n)$ wynika prawdziwość $T(n+1)$.*

PRZYKŁADY

Zad 1. Pokaż nierówność $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ dla każdego $x > -1$ i każdego $n \in \mathbb{N}$.

KROK 1. Dla $n=1$ nierówność jest równością: $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$.

KROK 2. Zakładamy, że dla pewnego n,

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx. \tag{1}$$

Ma z tego wynikać, że

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x. \tag{2}$$

Mnożymy nierówność (1) przez $(1+x)$. Ponieważ $x > -1$, $1+x > 0$, zatem znak nierówności się nie zmienia. Otrzymujemy

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geqslant 1+nx+x = 1+(n+1)x.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność (2).

Zad 2. Niech $a_1 = 2,...,a_{n+1} = \sqrt{a_n+3}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Pokaż, że cią (a_n) jest rosnący.

KROK 1. Sprawdzamy $a_2 = \sqrt{2+3} = \sqrt{5} > 2 = a_1$.

KROK 2. Musimy pokazać implikację $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$.

Niech $a_{n+1} > a_n$. Stąd $a_{n+1}+3 > a_n+3$. Stąd $\sqrt{a_{n+1}+3} > \sqrt{a_n+3}$. A to oznacza, że $a_{n+2} > a_{n+1}$.

Czasami prawdziwość zdania $T(n)$ chcemy pokazać nie dla wszystkich n, ale poczawszy od pewnego miejsca np. dla $n \geqslant n_0$. Wtedy algorytm dowodu nieco modyfikujemy:

KROK 1. Dowodzimy (sprawdzamy) prawdziwość zdania $T(n_0)$

KROK 2. Dowodzimy implikację: *dla każdego $n \geqslant n_0$ z prawdziwo-śći $T(n)$ wynika prawdziwość $T(n+1)$.*

Zad 3. Niech $a_n = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Pokaż, że dla $n \geqslant 7$, $a_n < \sqrt{n}$.

KROK 1. $a_7 \approx 2.59$, a $\sqrt{7} \approx 2.65$.

KROK 2. Niech dla pewnego $n \geqslant 7$, $a_n < \sqrt{n}$. Najpierw pokażemy nierówność (bez indukcji matematycznej).

$$\frac{2\sqrt{n}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Jest ona równoważna nierowności

$$\frac{2\sqrt{n}(n+1)+1}{(n+1)^2} < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Mnożąc nierówność przez $\frac{\sqrt{n}}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{2n(n+1)+\sqrt{n}}{2(n+1)^2} = \frac{2n^2+2n+\sqrt{n}}{2n^2+4n+2} <$$
$$\frac{2n^2+2n+n}{2n^2+4n+2} < \frac{2n^2+3n}{2n^2+4n+2} < 1.$$

Mamy

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{n+1} = \sqrt{\left(\sqrt{n} + \frac{1}{n+1}\right)^2}$$
$$= \sqrt{n + \frac{2\sqrt{n}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}} < \sqrt{n + \frac{2\sqrt{n}}{n}} = \sqrt{n + \frac{2}{\sqrt{n}}} \leqslant$$
$$\sqrt{n + \frac{2}{\sqrt{7}}} < \sqrt{n + \frac{2}{\sqrt{4}}} = \sqrt{n+1}.$$